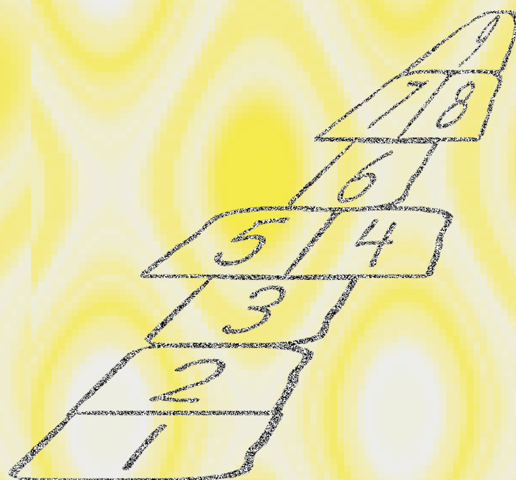
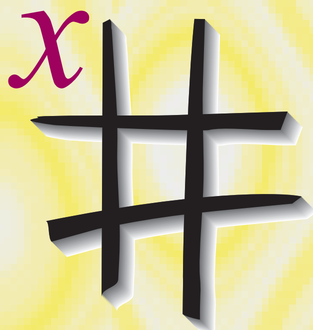
LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA ESCOLAR Y LA FORMACIÓN DEL PROFESOR

Grupo de Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas





ASOCIACIÓN COLOMBIANA
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
ASOCOLME

uno

CUADERNOS DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

gaia
Grupo
Editorial

LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA ESCOLAR Y LA FORMACIÓN DEL PROFESOR

Grupo de Matemáticas Escolares
de la Universidad Distrital
Francisco José de Caldas

Martha Bonilla Estévez / Neila Sánchez Heredia / Martha Vidal Arizabalet / Fernando Guerrero Recalde / Jorge Orlando Lurduy O. / Jaime Humberto Romero C. / Pedro Javier Rojas G. / Luis Oriol Mora V. / Cecilia Barón P. / **LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA ESCOLAR Y LA FORMACIÓN DEL PROFESOR** / - 1ed. - . Santa Fe de Bogotá, D.C., Grupo Editorial Gaia, 1999. 150p. - Colección: Cuadernos de Matemática Educativa No. 1 **ISBN : 958-96440-3-1**

LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA ESCOLAR Y LA FORMACIÓN DEL PROFESOR

CUADERNOS DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

uno

Grupo de Matemáticas Escolares
de la Universidad Distrital
Francisco José de Caldas

Martha Bonilla Estévez
Neila Sánchez Heredia
Martha Vidal Arizabalet
Fernando Guerrero Recalde
Jorge Orlando Lurduy O.
Jaime Humberto Romero C.
Pedro Javier Rojas G.
Luis Oriol Mora V.
Cecilia Barón P.

Profesores de la Facultad de Ciencias y Educación
de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas



ASOCIACIÓN COLOMBIANA
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

gaia
Grupo Editorial
Especialistas en Publicaciones Universitarias

COLECCIÓN:
CUADERNOS DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA ESCOLAR Y LA FORMACIÓN DEL PROFESOR

Autores:
© Martha Bonilla Estévez / Neila Sánchez Heredia
Martha Vidal Arizabalet / Fernando Guerrero Recalde
Jorge Orlando Lurduy O. / Jaime Humberto Romero C.
Pedro Javier Rojas G. / Luis Oriol Mora V. / Cecilia Barón P.

COLECCIÓN: ISBN : 958-96440
LIBRO: ISBN : 958-96440

Primera edición, 1999 200 ejemplares

© **Grupo Editorial Gaia**
Calle 74 No 22-70 Bogotá
Tel: 3102668311
gaiaeditorial@gmail.com

DIRECCIÓN GENERAL
ASOCIACIÓN COLOMBIANA
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, ASOCOLME

DIRECCIÓN EDITORIAL,
DISEÑO GRÁFICO Y DE CARÁTULA
Pedro Enrique Espitia Zambrano

DIAGRAMACIÓN Y EDICIÓN
Grupo Editorial Gaia
Calle 75B No. 114A - 64 Teléfax: 227 55 05

IMPRESO EN COLOMBIA. 1999

Contenido

Introducción

Durante la década de los noventa, se ha generado gran cantidad de investigación específica acerca de la formación del profesor, al punto que alrededor de esta problemática, existe hoy en distintos lugares del mundo programas de investigación desarrollándose a través de doctorados. En Colombia, el movimiento pedagógico ha producido abundante reflexión proveniente de los propios profesores, incluyendo la obtenida a través de investigaciones, sobre cómo se ha constituido históricamente el profesor y la escuela, colombianos, cómo son las prácticas pedagógicas que ocurren en nuestras aulas, cuál es el papel de la educación, etc.

Coincidiendo con este cúmulo de reflexión y, muy probablemente tomándola en cuenta, aparecen tanto los lineamientos curriculares como los mandatos del Comité Nacional de Acreditación (CNA), pretendiendo que las facultades formadoras de profesores se piensen a sí mismas en tanto su función social, la que reconocen y mediante la que legitiman su existencia.

La existencia de tal investigación y reflexión, así como la de los mandatos del CNA, confluye con la de nuestra propia reflexión e investigación y, con la existencia de grupos de trabajo en los proyectos curriculares Licenciatura en Matemáticas y Especialización en Educación Matemática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Este confluir de existencias nos ha conducido, entre otros, a los siguientes pronunciamientos:

- Una de las situaciones que genera más conflicto es la segregación que se da en el aula -vía la jerarquización de la inteligencia- a través de las realizaciones de los estudiantes en sus trabajos de matemáticas.

- Esta situación de segregamiento se basa principalmente en la concepción de que el conocimiento que se debe tratar en el aula es sólo el que está en los libros y que tener conocimiento es poder decir lo que en ellos está escrito.

- Para poder romper con la situación de segregación, hace falta discutir tal concepción sobre el conocimiento y sobre lo que significa conocer matemáticas, así como la gestión de las actividades en el aula y la multiplicidad de relaciones que en ellas se imbrican y esto es así porque el profesor deberá introducir como objetos de estudio las realizaciones de los estudiantes cuando hacen matemáticas.

- La formación que se ha ofrecido a los futuros profesores de matemáticas en Colombia, no es la adecuada para que en el ejercicio de su profesión consideren como dignas de estudio a las matemáticas que traen los escolares, ni para reconocer que los contenidos de la matemática escolar -aritmética, geometría, álgebra, cálculo, etc.- se estructuran y construyen de manera diferente a los contenidos que aceptan, discuten y manipulan los matemáticos profesionales (los que hacen y comunican nuevos resultados matemáticos a otros matemáticos).

- Si bien es cierto, el profesor se pregunta, y discute con otros profesores, sobre algunos sucesos de la clase, no es frecuente que haga lo mismo con respecto a la ne-

> cesidad de los contenidos que presenta en el aula; tampoco con las formas de evaluar, y menos aún se cuentione sobre su relación con el Proyecto Educativo Institucional (PEI) y los fines de la enseñanza trascendiendo la escuela. Pero, como a pesar de todo el profesor evalúa, lleva contenidos al aula y su trabajo es y produce sucesos en el mundo, entonces su ausencia de reflexión permite que otras personas e instituciones no escolares determinen la finalidad de su trabajo, así como los usos de su conocimiento. Dicho de una manera más cruda, el no haber ubicado un espacio para estas reflexiones, posibilita instrumentar al profesor.

Este libro no debe interpretarse como una propuesta para que el profesor actúe de una manera u otra, es un objeto público, vivo e intencionado que pretende conversar sobre todo con profesores de la educación básica que enseñan matemáticas.

Con distintos estilos narrativos, a los cuatro grupos de autores de este libro, los unifica la intención expresada; por ello, el primer capítulo está dedicado a presentar una propuesta acerca del conocimiento profesional del profesor, en particular del profesor de matemáticas para la educación básica y el papel de la matemática escolar. En el segundo se presentan las estructuras aditivas. En el tercer capítulo se pone en consideración algunas ideas acerca de las estructuras multiplicativas. Finalmente, en el cuarto, se describe algunos procesos de los niños, en su camino de dominio de la fracción, en particular, en el de su control simbólico.

CONOCIMIENTO PROFESIONAL

CAPÍTULO uno

Martha Bonilla Estévez
Neila Sánchez Heredia
Martha Vidal Arizabalet

Profesoras Universidad Distrital Francisco José de Caldas

El país atraviesa por un periodo caracterizado por la crisis educativa. Muchas son las causas de ella y muchos los diagnósticos al respecto, todos ellos concluyen aspectos tales como: la educación no forma para la autonomía, para resolver problemas, para el autoaprendizaje, para la incertidumbre, para el cambio , y en particular en lo referido a la educación matemática se dice que no hay comprensión conceptual, tampoco una buena comprensión y uso de los procedimientos propios de algunos aspectos de las matemáticas y mucho menos hay una formación para el planteamiento y resolución de problemas.

Entre otras razonas, para que se den tales condiciones se aduce una que es de nuestro interés como formadores de profesores: la deficiente formación inicial y permanente del profesorado, que no le posibilita convertirse en un dinamizador de procesos de cambio educativos. Como ya lo dijimos anteriormente, desde nuestra posición de instituciones dedicadas a la formación de maestros, nos debemos plantear aspectos tales como: qué enseñar, cómo enseñar y cómo evaluar los programas de formación que desarrollamos a diario y con los cuales esperamos influir en los aprendizajes de nuestros alumnos -futuros maestros ó maestros en ejercicio- de tal manera que ellos sean capaces de afrontar las nuevas exigencias educativas.

Uno de los tópicos que actualmente se estudian en relación a la formación del profesorado es la relación entre sus conocimientos previos relacionados con las nociones que ha de enseñar y el modelo didáctico que se adopta. Estos conocimientos previos han sido adquiridos como producto de los procesos de aprendizaje (tanto formales como no formales) que el profesor ha recorrido en toda su vida de formación, tal como lo afirma Llinares (1996), durante su vida escolar el profesor construye ideas acerca

de: las matemáticas, las matemáticas escolares, su aprendizaje y su enseñanza; aunado a ello aprende roles de funcionamiento en el aula relacionados con, por ejemplo, cómo «dictar» una clase, cómo aprenden los alumnos y cómo se evalúa el aprendizaje, es decir sobre el oficio del maestro de matemáticas.

Para los profesores de primaria existen hoy nuevas presiones culturales que les solicitan comprender el proceso educativo como una hipótesis de trabajo la cual se pone a prueba día a día. En particular en educación matemática se le exigen ciertas competencias y habilidades cognitivas y procedimentales para las cuales nunca fue formado, es por ello que otro de nuestros propósitos derivados del estudio de las preconcepciones en lo relativo a las nociones de operaciones aritméticas y sus algoritmos en el dominio de los número naturales, es el de diseñar, partiendo del conocimiento de las concepciones previas, programas de formación que tiendan a movilizar esa información hacia modelos más complejos y abstractos tanto sobre el conocimiento matemático en cuestión como sobre su enseñanza.

Por otro lado, es notoria la carencia de conceptualización en nuestras facultades formadoras de profesores acerca del conocimiento profesional del profesor, sobre cómo se puede ayudar a construirlo y cómo se puede ayudar a transformarlo en contextos prefigurados para estos propósitos.

En este capítulo se parte de reconocer la importancia, que para un formador de profesores tiene el conocimiento de la comprensión de las nociones curriculares escolares y su relación con los modos de representación que poseen los profesores de primaria.

1.1 PAPEL DEL PROFESOR

Desde una mirada retrospectiva podemos afirmar que el rol y el status del profesor ha venido cambiando. Del apóstol de la educación, mirado desde la perspectiva lasallista, se intenta pasar a una perspectiva tecnicista y de allí a una perspectiva profesional.

Desde hace ya varios años se ha comenzado a realizar investigaciones que pretenden dar cuenta de las características de la profesión de un profesor. En un comienzo las investigaciones buscaban la correlación entre las características personales del profesor y los logros de los estudiantes (medidos mediante test y pruebas de contenidos), los cuales no dieron índices positivos. Un segundo periodo de estos estudios se basó en la concepción que el maestro eficaz es aquel que usa métodos instruccionales bien definidos, lo que dio paso del profesor con determinadas características personales al profesor que usaba determinadas conductas en el aula (procesos de enseñanza) correlacionados con los logros de los estudiantes (producto de enseñanza). Las investigaciones que se refirieron a estas características las denominaron proceso-producto (Goody Brophy, 1986, Pérez Gómez, 1983. En García, 1997).

Una de las discusiones planteadas al paradigma proceso-producto fue la concepción que le subyace de aprendizaje; y a partir de allí, el rol asignado al estudiante (receptor de un conocimiento ya elaborado). Esta concepción no se corresponde con los indicadores de las investigaciones que se preocupan por la forma como aprenden los estudiantes, cuyos resultados indican que los niños constru-

yen el conocimiento y no sólo repiten lo que se les dice. Desde esta perspectiva los procedimientos tradicionales utilizados para evaluar el aprendizaje de los niños proporcionan una descripción distorsionada de este aprendizaje (Romberg y Carpenter, 1986).

Es por ello que se empieza a considerar como relevante reconocer que los niños al entrar a la escuela tienen un conocimiento a partir del cual van organizando y relacionando el que el profesor o los textos les proporcionan. Es tarea del profesor evaluar los conocimientos previos de los estudiantes y a partir de estos organizar su instrucción (contenido, métodos). Desde esta nueva perspectiva el maestro es visto como un "formador intelectual" en la medida en que su función principal está relacionada con ayudarle a sus estudiantes a desarrollar comprensión de la realidad, realidad cambiante permanentemente. Ya no es visto como simple técnico hábil en el manejo de estrategias en el aula (conductas efectivas) ni se afirma que sus actuaciones en el aula provengan sólo del conocimiento de la materia a enseñar.

Al complejizar la mirada desde la que se examina y comprende el conocimiento, el aprendizaje y la enseñanza, por lo tanto el aula y las actuaciones que en ella se encuentran, pueden aparecer preguntas nuevas, una de ellas es ¿de dónde provienen las formas de actuar del profesor en el aula ?. En particular ¿cuál es el papel que en ellas juega la experiencia del profesor ?. Livington y Borko (1989) analizaron las diferencias entre los profesores expertos y los profesores sin experiencia. Concluyeron que los profesores sin experiencia tienen dificultades para captar la información que es útil para la enseñanza, relacionada con los acontecimientos desarrollados en clase, debido a la falta de esquemas cognitivos claves que les per-

mitan acceder fácilmente a las actividades instruccionales, contenidos y estudiantes; a las dificultades que involucra el razonamiento pedagógico o procesos de la transformación de la materia en formas pedagógicas adaptables a la habilidad y el conocimiento de los estudiantes, y a la falta de conocimiento sobre la didáctica. Por tal razón ellos afirman que, en la formación de profesores se debe tener en cuenta la coherencia entre la formación de tipo teórico recibida y el tipo de trabajo práctico que posteriormente deben desarrollar. Un ejemplo de deformación se puede encontrar en la contradicción establecida entre la aceptación teórica del constructivismo como teoría válida del aprendizaje y la forma expositiva y tradicional de enseñanza que predomina en las carreras de formación de profesores.

De acuerdo a esta nueva conceptualización del profesor, Shoenfeld (1989) dice que se debe empezar a buscar una nueva dialéctica en el aula de matemáticas entre el contenido, los estudiantes y el profesor. Llinares (1990) cita al investigador Berliner quien señala:

> "Los profesores eficaces son aquellos que comunican un curriculum que se corresponde con los resultados. Los profesores eficaces proporcionan a sus estudiantes mejores oportunidades de aprender...ajustando el curriculum a los resultados".

Dadas las argumentaciones referidas anteriormente, se hace necesario preguntar entonces sobre ¿Cuál es el conocimiento que debe poseer el profesor para que pueda permitir y generar mayores condiciones para el aprendizaje?. En términos generales la pregunta es: ¿Qué es lo que actualmente, y basados en la literatura existente, se conoce como el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y cuáles son sus componentes?

1.2 CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR

Al indagar sobre la cognición del profesor en el contexto profesional, las investigaciones realizadas en esta temática se han centrado en tratar de dar respuestas a preguntas sobre distintos aspectos: la cognición, el conocimiento, las creencias, las concepciones, el contexto de trabajo, etc. y de esa conjunción de ideas es que se ha generado el término englobante "conocimiento profesional del profesor" . Es por ello que se puede considerar el conocimiento profesional del profesor como el engranaje de los diferentes tipos de conocimiento (saberes) que debe poseer un profesor (saber científico, saber profesional y saber común-práctico)[1] , y sus experiencias previas de formación que le determinan unas particulares rutinas de actuación, la mayoría de las veces de tipo inconsciente, pero que son las que le permiten un desempeño en las aulas de clase.

En los últimos años son varios los autores que se han interesado por describir las distintas componentes del "conocimiento profesional de profesor", cada uno lo concibe de manera diferente.

---

[1] Ponte (1992) citado por Llinares, Salvador. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función.(Conferencia IV Encuentro de Investigación en Educación Matemática, Portugal. Abril 1995). p3.

Refiriéndose al término conocimiento profesional Bromme y Tillema (1995), citado por García M. (1997) hacen una distinción según tres perspectivas: la cognitiva, la sociohistórica y creencias. Desde la perspectiva cognitiva este conocimiento se desarrolla como producto de la acción profesional, mediante la integración del conocimiento teórico y no sólo mediante la acumulación de un saber. Desde la perspectiva sociohistórica "el conocimiento profesional evoluciona gradualmente en un proceso de enculturación del profesor en un contexto de trabajo el cual es en sí mismo parte de una cierta cultura". Estos autores también consideran que los sistemas de creencias están incluidos en la conceptualización del conocimiento profesional entendido como conocimiento orientado a la práctica pedagógica del docente.

De cualquier manera la caracterización del conocimiento profesional del profesor, ha venido siempre marcada por la tensión existente entre el conocimiento teórico acumulado por las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje (teórico) y el conocimiento derivado de la práctica de los profesores que se ha ido formando a lo largo de su experiencia profesional (práctica). Llinares (1990).

La tensión ha venido marcada por la diferencia de estos dos tipos de conocimiento, el teórico es general e independiente del contexto, razón por la cual los docentes no consideran de interés el conocimiento que viene desde allí y el conocimiento práctico, derivado de situaciones concretas, al cual los investigadores no le dan mucho valor por considerarlo pura experiencia sin reflexión. Este divorcio se refleja en las opiniones de los profesores cuando afirman (profesores en ejercicio y estudiantes para profesores) que lo desarrollado teóricamente no les ha servi-

do para resolver las situaciones que se les presentan en la práctica pedagógica.

La búsqueda de los elementos caracterizadores de un conocimiento profesional específico del profesor de matemáticas, debe permitir encontrar nuevas perspectivas de actuación en la formación de profesores, con lo que se espera mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje en las clases de matemáticas a través del trabajo del profesor .

Feiman-Nemser y Folden (1986), citados por García (1997), consideran como componentes del conocimiento específico, el conocimiento práctico del profesor, formado por creencias, intuiciones, hábitos y experiencias anteriores, formas de superar y valorar determinadas dificultades y, un conjunto de técnicas instruccionales y destrezas de gestión de la clase que capacitan al profesor para hacer su trabajo en la escuela (conocimiento personal orientado a la acción). Al considerar que el conocimiento del profesor está generado por la interacción entre la formación teórica previa y la experiencia práctica, es decir es el producto de la interacción entre el conocimiento científico y los conocimientos adquiridos mediante la experiencia práctica, reconocen que el conocimiento profesional se genera en un contexto institucional.

Según García, Leinhardt y Greeno (1986) consideran la enseñanza como una destreza cognitivamente compleja y por ello han conjeturado que las destrezas del profesor para conseguir una enseñanza efectiva se apoyan en dos sistemas fundamentales de conocimiento: el conocimiento de la estructura de la lección y el conocimiento de la materia que enseña.

En las aulas escolares en general y en particular en las matemáticas, existe una doble interacción entre el profesor, los estudiantes y el contenido. Una en el sentido de la organización de acciones con un objetivo determinado, y la otra la relacionada con la comunicación de un contenido en particular.

La interpretación de estos dos sistemas específicos permiten al profesor formular planes, integrando objetivos y acciones con el contenido completo de las clases de matemáticas, que se ponen de manifiesto en las tareas que se desarrollan en la enseñanza. Por lo tanto las acciones en las aulas están caracterizadas tanto por las reglas que organizan la participación social como por las demandas y objetivos que provienen del contenido. (Doyle, 1986)

Desde esta perspectiva podemos considerar que los profesores expertos poseen una estructura de conocimiento muy compleja que les permite integrar los siguientes sistemas fundamentales en el conocimiento:

1. Conocimiento de un conjunto de acciones organizadas conectadas entre sí (esquemas de acción).

2. Esquemas de información que les permite conseguir y tomar nota de determinadas informaciones generadas por la actividad y que podrán usar en la organización y realización de actividades posteriores, permitiendo una flexibilidad apropiada natural en el transcurso de la clase.

Es por ello que en este estudio consideramos que un profesor experto es quien sabe:

- la materia a enseñar y conoce sobre las conductas de sus estudiantes y características de situaciones de enseñanza.

- cómo enseñar los diferentes tópicos del currículo usando múltiples representaciones del tema a enseñar, moviéndose de las representaciones al concepto y viceversa.

- identificar los momentos en los que puede modificar el plan de la clase de acuerdo a los comentarios de los estudiantes porque es capaz de evaluar los procesos de aprendizaje de un alumno.

- determinar cuándo sus estudiantes han aprendido y cuándo no y puede cambiar el esquema de actividades previsto disminuyendo así la dificultad presentada en el aprendizaje por los estudiantes.

- utilizar las preguntas que sus estudiantes hacen para aclarar aún más el tema tratado y logra establecer relaciones rápidamente entre los diferentes elementos del conocimiento.

Este tipo de competencias se adquiere como producto de una síntesis entre práctica pedagógica y teoría, que le permite generar un conocimiento mediante el cual identifica una serie de factores presentes en el aula de clase e interactuar con ellos en la medida en que debe tomar decisiones propias de la enseñanza.

El aspecto clave que permite determinar el conocimiento base para la enseñanza, según Shulman (1987), se encuentra en la interacción del conocimiento del contenido y la

pedagogía, en la capacidad del profesor para transformar su conocimiento del contenido en representaciones pedagógicas fuertes y adaptables a las diferentes habilidades y conocimiento previo de los estudiantes.

Según este autor el conocimiento base para la enseñanza comprende tres aspectos:

- El conocimiento específico de la materia
- El conocimiento de contenido pedagógico
- El conocimiento curricular.

i. El conocimiento específico se refiere al conocimiento de la materia que poseen los profesores, "es la cantidad y organización del conocimiento per se en la mente del profesor" que no sólo debe comprender que algo es así sino también debe comprender por qué es así.

ii. Conocimiento del contenido pedagógico: integración de diferentes componentes del conocimiento del profesor que forman una amalgama especial de contenido y pedagogía, que caracteriza la comprensión de cada uno lo cual le permite tener un estilo personal.. Está compuesto por el conocimiento de la materia para enseñar, el conocimiento de la pedagogía general y el conocimiento de las metas y objetivos de la educación.

Para nuestro caso, los profesores de matemáticas deben comprender temas particulares, procedimientos, conceptos y relaciones entre ellos, deben saber sobre la naturaleza del conocimiento de las matemáticas, de dónde proceden, qué significa saber y hacer matemáticas (cuál ha sido la evolución del conocimiento matemático, los errores, los estancamientos, la dinámica de la producción de co-

nocimiento). El profesor debe establecer relaciones entre el conocimiento y sus diferentes modos de representación, ya que ésto puede hacer que el maestro amplíe la comprensión conceptual de las ideas y conocimientos matemáticos, y contribuye a la comprensión de aprender a enseñar matemáticas.

El conocimiento de la materia para enseñar se refiere a:

- Las características del aprendizaje de los aspectos involucrados en tal materia, métodos instruccionales, creencias epistemológicas del profesor de la materia que enseña .

- Conocimiento de las fases por las que paulatinamente deben pasar los estudiantes para llegar a la construcción de las nociones y conceptos a aprender.

- Conocimiento del profesor de las teorías sobre el conocimiento conceptual y procedimental.

- Conocimiento de estrategias y procedimientos que le ayuden al estudiante a conectar lo que está aprendiendo con lo que ya conoce.

- Creencias epistemológicas que tienen los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza.

EL conocimiento de la pedagogía general se refiere a:

- Técnicas y principios pedagógicos generales, estrategias para el manejo, gestión y organización del aula de clase y de la organización escolar.

El conocimiento de metas y objetivos de la educación desde una perspectiva general:

- Fines de la educación; en nuestro país están por ejemplo: la ley general de educación, plan decenal, etc, todas las reglamentaciones que con respecto a la profesión docente y al quehacer educativo se tienen como marcos legales que contextualizan la labor del docente.

El conocimiento de currículo: Está integrado por los siguientes aspectos:

- Conocimiento de materiales curriculares, que sirvan como herramientas para facilitar la comprensión en el aula.

- Conocimiento de otras disciplinas escolares con el fin de poder correlacionar o interactuar de acuerdo a temáticas afines con la disciplina en la cual se inscribe la materia objeto de enseñanza.

- Conocimiento del currículo de los siguientes cursos, lo que permite determinar metas y objetivos más claros en la enseñanza de la materia que se está desarrollando en el momento.

- En nuestro caso, debe entenderse que la materia se refiere a las matemáticas.

1.3 PERSPECTIVAS DE APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Son varios los estudios que permiten establecer características principales para la comprensión del problema del conocimiento profesional del profesor. En particular, se destacan tres perspectivas:

- Perspectiva de aprender a enseñar
- Perspectiva desde el trabajo profesional
- Perspectiva cognitiva

1.3.1 Perspectiva de aprender a enseñar

García, en este sentido, comenta los estudios realizados por Shulman (1986,1987) ; Peterson (1988) ; Leinhardt y sus colaboradores (1990) ; Llinares (1991) ; Fennema y Loef (1992) ; Bromme (1994) ; Lappan y Thoule-Lubienski y Wilson (1994), establecen que esta perspectiva aborda problemáticas relacionadas con: "qué conocen los profesores de su materia, dónde y cuándo adquieren ese conocimiento, cómo y por qué ese conocimiento es transformado durante la enseñanza o formación del profesor y cómo el conocimiento se usa en la enseñanza de la clase".

Estos estudios han tenido dos grandes marcos teóricos de análisis: uno para los componentes del conocimiento profesional base, y otro para el proceso de razonamiento pedagógico del profesor.

CONOCIMIENTO BASE	
CONOCIMIENTO DE LA MATERIA ESPECÍFICA	CONOCIMIENTO MATEMÄTICO DEL PROFESOR
CONOCIMIENTO DE CONTENIDO PEDAGÓGICO	LIGADO A LOS PROCESOS DE INSTRUCCIÓN, FORMACIÓN, COMPRENSIÓN Y MEDIOS DE APRENDIZAJE
CONOCIMIENTO CURRICULAR	RELACIONADO CON LA ORGANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA.

1.3.2 Perspectivas desde el trabajo profesional

Hay varios enfoques al respecto, en donde se observa la búsqueda de integración de los conocimientos a nivel cognitivo, a nivel práctico y a nivel profesional.

Los aspectos más importantes se pueden encontrar en los tópicos referenciados por los siguientes autores:

AUTORES	TÓPICOS
LLINARES (1991)	Dotar de significado a procedimientos matemáticos Conocimiento de matemáticas Conocimiento de aprendizaje de las nociones matemáticas y conocimiento del proceso instructivo.
BROMME (1994)	Descomposición analítica del conocimiento profesional de los profesores teniendo en cuenta: • Conocimiento de la matemática como disciplina. • Conocimiento de las matemáticas escolares. • Conocimiento de la filosofía de las matemáticas escolares • Conocimiento de la pedagogía. • Conocimiento de la pedagogía específica de la materia.
FENNEMA Y LOEF (1992)	Énfasis en el conocimiento situado, en el contexto en el que se desenvuelve un docente, los aspectos que señalan son: • Conocimiento matemático • Conocimiento pedagógico y • Conocimiento de las cogniciones de los aprendices en matemática.

En éste último enfoque el conocimiento del profesor se contextualiza en el aula y ofrece una perspectiva para la acción, dado su carácter dinámico e interactivo.

Es importante tener en cuenta que aunque son varios los enfoques que se han elaborado, sin embargo se tiene claro que cada uno aporta elementos significativos para los procesos de enseñanza aprendizaje que no son excluyentes.

1.3.3 Perspectiva cognitiva:

La idea principal de esta perspectiva se centra en considerar "la enseñanza como una destreza cognitiva compleja" que puede analizarse de manera similar a otras destrezas cognitivas.

En el siguiente cuadro comparativo se pueden apreciar las aproximaciones de los componentes y organización del conocimiento del profesor, en donde cada uno hace énfasis en alguno de los conocimientos asociados o prioriza algunos de ellos.

DISTINTAS APROXIMACIONES A LAS COMPONENTES, ORGANIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL[2]

AUTORES	COMPONENTES (conocimiento de..)	GENERACIÓN énfasis epistemológico	ORGANIZACIÓN énfasis cognitivo
Elbaz, 1983	• contenido • de sí mismo • del currículo • del entorno • métodos de enseñanza		• jerárquico • reglas prácticas • principios prácticos • imágenes

[2] Tomado de García, M. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Editorial Kronos. 1997. p 39-40.

Schön, 1983,1987		• práctico • generado en contexto de acción a través de la reflexión	
Shulman, 1986-1989	• la materia específica • contenido pedagógico • curricular		• proposicional • de casos • estratégico
Peterson, 1988	• las características del aprendizaje de las nociones específicas • la enseñanza de tópicos concretos • los propios procesos cognitivos		• estructuras cognitivas
Ernest, 1989	• las matemáticas • otras materias específicas • la enseñanza de las matemáticas • la organización y el manejo de la clase • del contexto en la enseñanza de las matemáticas • la educación		
Leihnhardt, 1990	• la materia • la estructura de la lección	• situado	• agendas • esquemas • rutinas
Llinares, 1991	• matemáticas • del aprendizaje de las nociones matemáticas • del proceso instructivo	• contextualizado en la clase de matemáticas • puesto de manifiesto en la realización de las tareas profesionales del profesor.	
Fennema y Loef, 1992	• matemáticas • pedagogía • las cogniciones de los aprendices en matemáticas	• interactivo y dinámico • contextualizado en el aula	

Ponte, 1992		• carácter social e individual • descriptivo • proposicional • activo y procedimental • de control	
Blanco, 1994			• estático • dinámico
Bromme, 1994	• matemáticas como disciplina • matemáticas escolares • filosofía de las matemáticas escolares • pedagogía general • pedagogía específica de la materia	• integración cognitiva del conocimiento desde diferentes disciplinas durante la formación práctica y experiencia personal	
Fenstermacher, 1994		• formal • práctico	
Lappan y Therle-Lubienski, 1994	• matemáticas • pedagogía de las matemáticas estudiantes como aprendices de matemáticas.		

La importancia de esta esquematización estriba en el carácter multidimensional que han asumido las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor, que implican el análisis de variados contextos, en donde lo cultural cobra sentido.

De otro lado, es posible establecer también relaciones transversales en el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas relacionadas con:

• *Relación entre conocimiento y práctica profesional*

(Romberg, 1988, Tom y Valli, 1990 ; Sánchez, 1992). Aquí el análisis se orienta al carácter profesional y a la profesionalización de la enseñanza, destacándose que a nivel profesional, el profesor debe:

a. poseer un conocimiento como resultado de la formación y de la experiencia

b. utilizar el conocimiento para toma de decisiones y elaboración de juicios en la profesión

c. elaborar conocimientos, desarrollar conflictos y cambios en la profesión.

Del conocimiento ligado a la práctica profesional han surgido cuestionamientos relacionados con la "práctica", el "conocimiento práctico personal", el "conocimiento en acción", la "reflexión en la acción", la "reflexión sobre la práctica", elementos de investigación que se recogen en la corriente denominada "epistemología de la práctica" apoyada en los trabajos de Schön (1983,1987). De otra parte autores como Ponte (1994) han puntualizado acerca de la **validez** de los conocimientos generados a través de la práctica profesional y han establecido el análisis de otras vías diferentes para este tipo de conocimiento, diferenciadas substancialmente de los enfoques tradicionales derivados de las investigaciones en educación en el campo teórico, filosófico y científico.

• *Relación entre conocimiento y creencias*

El problema de las relaciones entre conocimientos y creencias ha sido planteado por varios investigadores e igualmente desde diversas perspectivas. García cita a autores como Thompson (1992), Ernest (1989), Brown y Cooney (1982), Grossman (1989), entre otros, que plantean a grosso modo que las creencias de los profesores sobre enseñanza y aprendizaje están relacionadas con la forma en que ellos piensan sobre la enseñanza, con la forma con que ellos aprenden de sus experiencias y cómo se conducen en la clase, observándose claramente una relación intrínseca con el conocimiento de contenido pedagógico.

Existen por tanto en el conocimiento profesional del profesor componentes objetivos y subjetivos que se han tratado de dilucidar en las investigaciones en el campo de la educación matemática. Puede decirse que siendo aspectos que coexisten, su comprensión determina campos de acción y reflexión sobre el contenido concreto de las matemáticas y las relaciones básicas entre los procesos de enseñanza aprendizaje de las mismas.

• *Relación entre conocimiento de contenido pedagógico y conocimiento de las matemáticas*

En el campo de la educación matemática, Llinares (1991,1994) plantea

> *"que el conocimiento de contenido pedagógico se configura por la integración de los diferentes dominios identificados desde*

> *el análisis de la tarea profesional del profesor. La idea central para distinguir el conocimiento que fundamenta la enseñanza está en la capacidad del profesor para transformar el conocimiento de matemáticas en representaciones que le sean útiles a él y a los alumnos en cuanto al mayor desarrollo de los objetivos de la enseñanza. Esta capacidad vendrá propiciada por la intersección - interrelación entre contenido y pedagogía, una amalgama que es la forma propia de comprensión profesional de los profesores"*[3]

Cabe destacar con respecto de la consideración específica de un conocimiento de contenido pedagógico, que se han suscitado varias controversias que indican que la distinción entre conocimiento de contenido pedagógico y el conocimiento de la materia (matemáticas) no es muy clara, debido a que puede considerarse que: "todo conocimiento es en formas varias, pedagógico" (Mc Ewan y Bull, 1991). Sin embargo, ha sido posible establecer desde diversos puntos de las investigaciones realizadas, que hay diferenciaciones y multiplicidad de formas de los procesos de enseñanza aprendizaje en los que el conocimiento de contenido pedagógico ha puesto en evidencia el carácter transversal y longitudinal de la obtención de dichos conocimientos, en los que la complejidad de las variables citadas en los ítemes anteriores, dan relevancia a esta diferenciación.

Para nosotros, el conocimiento de contenido pedagógico es el constructo básico mediante el cual se espera lograr una mayor comprensión del manejo de los conceptos aritméticos por parte de los profesores en ejercicio de la educación básica primaria.

[3] Citado por García, M op. cit. p 47

1.4 EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR Y LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN

Es claro que al diseñar programas de formación de profesores se asume diferentes perspectivas epistemológicas que determinan la selección de los contenidos, los entornos de aprendizaje, las formas de evaluación, es decir todo aquello que constituye el currículo declarativo. Por ello podemos afirmar que estructurar un programa de formación con la lente de una disciplina debe generar currículos (ó propuestas de programas) diferentes a aquellos que tengan como eje principal el denominado "conocimiento base" para la enseñanza.

Las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor arrojan un conjunto de perspectivas acerca de lo que se considera el conocimiento base para la enseñanza que todo profesor (estudiante para profesor ó profesor en ejercicio) debe poseer.

Aún clarificando las componentes del conocimiento profesional del profesor, a los formadores de profesores les compete encontrar información acerca de cómo este conocimiento se relaciona con la práctica, ya que una de las características de la profesión del profesor es que ella es eminentemente práctica en la medida en que su ámbito de actuación es el aula de clase.

La tensión entre conocimiento científico y conocimiento práctico, ha estado presente en el debate sobre cómo

entender el conocimiento profesional del profesor, del cual derivar información que permita la toma de decisiones sobre los contenidos y estructuración de los programas de formación de profesores. En el trasfondo de este debate está una discusión epistemológica que engloba aspectos relativos a: ¿qué se entiende por conocimiento ?, ¿cuál es el status del conocimiento práctico del profesor ?, ¿cómo se genera el conocimiento profesional del profesor ?

En este sentido las investigaciones realizadas han ido arrojando resultados que permiten comprender mejor aspectos tales como las cogniciones de los profesores, el papel de las creencias y de los contextos socio-culturales, el papel de los saberes prácticos y sus caracterización, en lo que se ha denominado el proceso de aprender a enseñar matemáticas.

1.4.1 El conocimiento pedagógico en el proceso de enseñar matemáticas.

Como ya se referenció en el apartado anterior, el aporte de Shulman -en opinión de los autores consultados- en relación a la caracterización del conocimiento profesional del profesor es el haber descrito lo que él denominó "conocimiento de contenido pedagógico", dominio en el cual está como contexto muy particular "la materia que enseña". Este reconocimiento hace que se pueda afirmar -desde el campo de la educación matemática- que las matemáticas mismas como disciplina se han de incorporar al conocimiento del profesor en al menos dos aspectos: el conocimiento sobre las matemáticas y el aspecto relativo a cómo se aprende las matemáticas, aspectos que de alguna manera determinan el cómo enseñar.

Noddings -citado por Llinares- al considerar la existencia de un conocimiento específico para la enseñanza de las matemáticas, hace alusión a los problemas de la relación que necesariamente debe existir entre conocimiento de las matemáticas y el conocimiento de contenido pedagógico y enfatiza la necesidad de decidir sobre cuándo esos dos dominios de conocimiento se deben incorporar en los programas de formación. Al respecto Shulman, propuso una organización del conocimiento profesional del profesor que engloba: el conocimiento proposicional, el conocimiento de casos y el conocimiento estratégico. Desde diferentes perspectivas (Fenstermacher y, McEwan y Bull) se ha criticado el constructo conocimiento de contenido pedagógico, sin embargo,

> *"desde el propio campo de la educación matemática, Cooney (1994 a) considera como relevante en la noción de Shulman la integración de contenido y pedagogía).. esta idea es apoyada por Bromme (1994) .. con lo que subraya un rasgo característico del conocimiento profesional, cuyo contenido inicialmente procede de distintos dominios (entre los que se identifica el conocimiento de contenido pedagógico específico de las matemáticas), integrándose y articulándose en las situaciones prácticas"*[4]

El contexto de análisis de esta investigación, que aportará elementos para tomar decisiones más informadas sobre la propuesta de programas de actualización de profesores de primaria, se enmarca en la reflexión sobre el diseño del programa de formación tomando como eje el **conocimiento profesional del profesor**, entendido como una integración de diferentes ámbitos: las investigaciones de-

[4] Llinares, Salvador. Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: implicaciones en la formación de profesores de Matemáticas. 1995. P163.

sarrolladas, las intervenciones en la práctica y los procesos de reflexión de las mismas.

En particular y tomando como referencia la idea de conocimiento de contenido pedagógico, se pretende involucrar en los procesos de formación de profesores, la comprensión por parte del profesor de los procesos por los cuales los niños aprenden determinadas nociones. Concretamente las nociones involucradas en los procesos de resolución de problemas verbales de estructura aditiva y multiplicativa y, de los conceptos involucrados en los algoritmos de las cuatro operaciones. Una de las creencias que están implícitas en el trabajo es la idea de que el conocimiento y la comprensión del profesor de este tipo de características del aprendizaje de los niños influye en el desarrollo de la enseñanza que realiza. De manera particular se espera que con este tipo de conocimiento el profesor aprenda a diseñar tareas y a gestionar aprendizaje significativo en sus intervenciones en el aula.

Tanto las investigaciones realizadas sobre cómo aprenden los niños determinados conceptos y procedimientos matemáticos como las investigaciones que pretenden dar cuenta del conocimiento y comprensión que tienen los profesores sobre la materia que enseñan, permiten a los formadores de profesores tener referentes diferentes al diseñar entornos de aprendizaje para los profesores en ejercicio. Con ello se espera que dado que, los profesores tendrán una mejor comprensión de lo que sucede en sus aulas y la manera como ellos pueden ayudar a los niños a comprender mejor, los resultados de los aprendizajes comprensivos mejorarán, contribuyendo así al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel de la básica primaria.

1.5 LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES: SU COMPRENSIÓN Y USO POR PARTE DE LOS PROFESORES DE PRIMARIA

En la mayoría de los profesores de la básica primaria sus conocimientos matemáticos provienen de lo aprendido durante el periodo como estudiantes de la enseñanza básica primaria y básica secundaria, que les ha permitido estar en contacto con una instrucción en matemáticas formándose una idea de lo que puede llegar a considerarse el objeto de estudio de los programas curriculares de la enseñanza básica. Desde los primeros años ha estado vinculado con "ejercicios" de sumar, restar, multiplicar, dividir .... con resolución de "problemas" de cálculos matemáticos. Esta manera de hacer matemáticas ha generado concepciones sobre lo que es enseñar y aprender matemáticas en las aulas de primaria, que los ubica en un modelo de enseñanza instruccional caracterizado por ser un modelo implícito, no reflexivo y aprendido en la práctica de su formación, se repite la forma en que ellos aprendieron, sin que para ello se hagan mayores explicaciones acerca del qué enseñar, cómo enseñar y del para qué enseñar, dado que estas cuestiones se presuponen dadas por las autoridades competentes o por las legislaciones educativas, en nuestro caso por el Ministerio de Educación, las secretarías de educación ó los textos escolares.

El manejo de algoritmos y la memorización y asimilación de diversos procedimientos de manejo de reglas han sido

en gran parte las actividades matemáticas desarrolladas por dichos maestros, las matemáticas para ellos son las de los libros texto producto del currículo de matemáticas desarrollados con ellos.

1.5.1. El conocimiento matemático

Tal como lo afirma Llinares (1996), uno de los aspectos relevantes, planteados en el contexto de la comprensión por parte de los profesores de la básica primaria es la naturaleza de dicha comprensión en relación a los conceptos, símbolos, reglas y procedimientos matemáticos, la relación entre la comprensión de los procedimientos y el significado dado de los procedimientos, reglas y algoritmos.

La naturaleza del aprendizaje matemático, como objeto de investigación ha sido tratada por investigadores en educación matemática, quienes se han centrado en la caracterización del conocimiento matemático como las relaciones entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. Según Hiebert y Lefevre, citados por Llinares (1996),

> "E*l conocimiento de procedimiento consta de dos partes. Una parte es la relativa al conocimiento de los sistemas de representación de símbolos matemáticos. Por ejemplo los símbolos para los diferentes tipos de números (naturales, "7/4" fracciones, 3.566 decimales, etc.), las diferentes operaciones matemáticas ("+", "-", "x", "÷" ,log) y las reglas sintácticas para manejar y aceptar la corrección formal de la representación de dichos símbolos ("2/ + 7/ =" puede ser una expresión formalmente no correcta frente a "2/3 + 1/5 =")*

> *En segundo lugar, el conocimiento de procedimiento consiste en el conocimiento de reglas y algoritmos para desarrollar alguna tarea matemática (por ejemplo el procedimiento de calcular fracciones equivalentes, el algoritmo para calcular la raíz cuadrada de un número, etc.) es el conocimiento de los diferentes pasos en el desarrollo de los procedimientos reglas y algoritmos*" *(Llinares, pág. 282).*

Para estos mismos autores el conocimiento conceptual es rico en relaciones y se genera construyendo relaciones de diferente naturaleza entre partes de contenidos, un ejemplo de ello lo tenemos cuando se estudia el concepto de suma en los números naturales teniendo diferentes contextos: suma como cambio (dada una condición inicial y una final existe una forma de pasar de una situación a la otra), de comparación (¿cuánto más?), de combinación (suma de elementos de conjuntos en donde se toma parte + parte = todo) y de igualación (se usa la expresión tener tanto como), y con diferentes modos de representación (conjuntos, modelos lineales, regletas y funcional). El concepto de suma se tiene cuando se es capaz de identificar en los diferentes contextos, una relación que indica la operación de sumar (añadir, compensar, reunir, agrupar).

La importancia de la identificación de estos dominios de conocimiento radica en el papel que desempeñan las relaciones múltiples entre ellos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y la diferente naturaleza de dichas relaciones (Silver, 1986, citado por Llinares, 1996).

La experiencia nos lleva a afirmar que por el alto énfasis en el conocimiento de tipo procedimental, dado en los programas escolares, los estudiantes no siempre cons-

truyen el conocimiento conceptual y sus interrelaciones con el conocimiento de tipo procedimental. El tipo de enseñanza que los profesores realizan: preocupación porque los resultados de los ejercicios sean correctos, porque se conozcan las tablas de multiplicar, porque se aprenda los «pasos» de cada algoritmo, porque se apliquen las fórmulas correctas en un ejercicio determinado etc. propician esta situación.

1.5.2 el aprendizaje de las matemáticas.

Con los avances de la sicología cognitiva

> *"hoy se admite, de manera generalizada que el aprendizaje es un proceso constructivo, entendiendo por tal aquel proceso en el que se adquieren nuevos conocimientos mediante la interacción de las estructuras presentes en el individuo con la nueva información que le llega; de forma que los nuevos datos, en cuanto que se articulan con la información preexistente, adquieren un sentido y un significado para el sujeto que aprende"*

Del párrafo anterior se concluye que el aprendizaje se construye sobre la base de la interacción entre lo que se sabe y lo que se va a aprender, todos construimos interpretaciones del mundo basados en los constructos que tenemos. Es por ello que hoy se habla de aprendizaje significativo como contraposición al denominado aprendizaje memorístico. Este último se considera por Skemp (1993) como la forma propia de aprender de las especies no humanas en contraposición al aprendizaje significativo que se caracteriza porque implica la comprensión, en particular al hablar de las matemáticas se hablará de la

formación de estructuras conceptuales y sus relaciones, que deben ser comunicadas por medio de símbolos.

Para comprender las nociones anteriores es necesario clarificar la idea de concepto y de estructura conceptual.

> *"Abstraer es una actividad por la cual nos hacemos conscientes de similitudes (en el sentido cotidiano, no matemático) entre nuestras experiencias. Clasificar significa reunir nuestras experiencias sobre la base de estas similitudes. Una abstracción es cierto tipo de cambio mental duradero, el resultado de abstraer, que nos capacita para clasificar nuestras experiencias como poseedoras de similitudes con una clase ya formada. Brevemente, es algo aprendido que nos capacita para clasificar ; es la propiedad que define una clase. Para distinguir entre abstraer como actividad, y una abstracción como producto final, denominaremos a la última, de ahora en adelante, como concepto"*[5]

Ello quiere decir que para la formación de un concepto es necesario tener una cierto número de experiencias que posean algo en común de tal manera que permitan la clasificación. Una vez el concepto se tenga es posible que se inicie el proceso de ejemplificación por parte del individuo que lo ha construido. Una interesante aclaración se refiere a la diferencia entre la definición y el concepto. Una definición es una manera verbal de explicitar las características ó funciones de un concepto pero de ninguna manera reemplaza a la actividad mental propia de la construcción conceptua; la definición se puede repetir, el concepto se construye.

Particularmente, Skemp, al tratar sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos, muestra cómo la gran difi-

[5] **SKEMP, R** (1993) *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid :Morata p.26.

cultad en su aprendizaje puede estar en la diferenciación entre aprender conceptos cotidianos y aprender conceptos en los que los grados de generalización y abstracción están muy presentes. Estas características de los conceptos matemáticos son las que a la vez le dan su carácter de potencial para el desarrollo de un pensamiento avanzado. Es por ello que para el autor "las matemáticas no pueden aprenderse directamente del entorno cotidiano, sino sólo de manera indirecta desde otros matemáticos" [6]

El papel de otros matemáticos se lo adjudica al profesor, de quien dice debe saber proporcionar al estudiante una gran variedad de situaciones las cuales le permita una construcción conceptual a la vez que se asegura que sólo si ya se posee un concepto se es capaz de aprender otros. Ejemplos de conceptos matemáticos básicos (no fáciles) lo constituyen el número natural, los conjuntos, el conteo, la variable, la función.

Es obvio que otra de las características del conocimiento matemático es que en él aparecen los conceptos relacionados -tal vez jerarquizados- y surge así la idea de estructura. Para articular conceptos usamos varias fuentes: la relación, la transformación, las equivalencias, etc. El aprendizaje de estructuras matemáticas es otro de los propósitos de la matemática escolar, en tanto ellas le permiten al estudiante integrar conceptos y propiciar la construcción de otros nuevos. La función integradora de una estructura nos hace conscientes de que cuando se tiene un concepto éste lo es en sí mismo y a la vez porque es miembro de una clase. En lo relativo al aspecto constructivo, tenemos ejemplos como los que conocemos cuando un niño

[6] Ibid. p.36.

aprende los números hasta 10 y puede más o menos rápidamente construir otros círculos numéricos. Es teniendo en cuenta estas dos funciones de las estructuras que se puede afirmar que "comprender un concepto" es lo que permite incluirlo en una estructura adecuada.

Ejemplos de estructuras conceptuales los tenemos al usar el sistema de numeración para dar sentido a la construcción de los números, a las operaciones entre los números. Cabe aclarar que cada nuevo conjunto numérico se genera por relaciones diferentes y por lo tanto su construcción conceptual debe ser diferente, es el caso de la diferencia entre números naturales y números fraccionarios, en estos últimos la idea de unidad cambia, así como las formas de explicar y comprender las operaciones básicas; aún así, la estructura del sistema de los números naturales le permite a un alumno la construcción de nuevos sistemas numéricos en la medida en que ha construido conceptos como el conteo, la clasificación, la ordenación, etc.

1.5.3 El conocimiento de contenido pedagógico del profesor de primaria

Como ya lo dijimos en apartados anteriores, la expresión "conocimiento de contenido pedagógico del profesor" fue introducida por Shulman y tal como lo afirma Llinares (1996)

> *"incluye la "comprensión del profesor" de lo que hace el aprendizaje de un tópico específico fácil o difícil. Este conocimiento está vinculado al uso que el profesor debe hacer de su conocimiento de las matemáticas en las situaciones de enseñanza. En esta componente del conocimiento del profesor se enfatiza*

la forma en que las matemáticas deben ser presentadas en la enseñanza " (Pág. 17).

Apoyados en esta afirmación consideramos que, una componente del conocimiento del profesor es el conocimiento de las diferentes clasificaciones de las estructuras aditivas y multiplicativas y sus modos de representación. Así mismo el profesor debe tener un conocimiento sobre los procedimientos computacionales involucrados en los algoritmos de las cuatro operaciones, que hacen relación a la estructura analítica, es decir a la comprensión de los conceptos y propiedades implícitas en cada uno.

En tiempos recientes ha habido por parte de los investigadores en educación un interés por realizar análisis teóricos sobre las estructuras aditiva y multiplicativa así como promover estudios para investigar la adquisición de los conceptos y las relaciones entre ellos implicadas en dichas estructuras. Los autores que han proporcionado más análisis sobre este tema y que han sido consultados por nosotros son: Vergnaud, Nescher, Castro y Castro, Greer.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Azcárate, P. (1994). Presupuestos iniciales para un trabajo de investigación sobre formación del profesorado. En: Revista Investigación en la Escuela No. 22. p. 84-89.

Azcárate, P. (1994). La naturaleza de la matemática escolar: problema fundamental de la didáctica de la matemática. En: Revista Investigación en la Escuela No. 24. p. 78-88.

Blanco, L. (1996) : Aprender a enseñar matemáticas : Tipos de Conocimiento. En: J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) *El Proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Colección Mathema. Granada :Comares.

Carpenter T, Fennema E. , Peterson P y Carey D. (1988) Theachers pedagogical content knowlodge of students problem solving in elementary arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 19 (5).

Garcia, M (1997) Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza aprendizaje. Universidad de Sevilla: GIEM.

Llinares, S. y Sánchez, V. Eds. (1990). Teoría y Práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar.

Llinares, S. (1991). La naturaleza de la comprensión de las nociones matemáticas. Variable en la formación de Profesores de Matemáticas. En: C. Marcelo y otros (Eds). *El estudio de casos en la formación del profesorado y la investigación didáctica.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Llinares, S. (1992). Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. En: C. Marcelo. La investigación sobre formación del profesorado :métodos de investigación y análisis de datos.. Universidad de Sevilla :Cincel.

Llinares,S. (1993). Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje. En L. Montero y J.M.Vez (eds) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado.* Santiago :Tórculo.

Llinares, S., Sánchez, V. y García, M. (1994): Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. Revista de Educación No. 304. Madrid :Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Llinares, S. Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. Mimeo. Conferencia presentada en el IV Encontro de Investigaçao em Educaçao Matemática. Luso, Portugal, 27-29 de Abril de 1995.

Llinares, S. (1996) : Contextos y aprender a enseñar matemáticas : El caso de los estudiantes para profesores de primaria. En: J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) *El Proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática.* Colección Mathema. Granada :Comares.

Llinares, S y Sánchez, V. (1996) : Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de Primaria. En: J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) *El Proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática.*Colección Mathema. Granada :Comares.

Merlin C. Wittrock (comp)(1997) La investigación de la enseñanza I. Enfoques, teorías y métodos. Barcelona :Paidos.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Profesionals standards for teaching mathematics. Reston :NCTM.

Porlán, R. (1990). Constructivismo y escuela. Sevilla :Diada.

Porlán, R. y Martín, J. (1991). El diario del profesor. Sevilla :Diada.

ESTRUCTURA ADITIVA Y FORMACIÓN DE PROFESORES PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA

2

CAPÍTULO dos

Martha Bonilla Estévez
Neila Sánchez Heredia
Fernando Guerrero Recalde

Profesores Universidad Distrital Francisco José de Caldas

> *"El pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones"* MEN (1998).

Las matemáticas escolares de la educación básica primaria ponen en contacto a los niños, desde que inician su vinculación a la escuela, con actividades aritméticas que requieren el uso de números, operaciones y problemas.

Una de las actuales críticas a la formación matemática que los niños reciben en la escuela, cuestiona que la actividad matemática escolar se refiere únicamente a los conocimientos procedimentales y poco o nada se hace énfasis en los conocimientos conceptuales, posibles de construir a partir de las experiencias que los niños tienen en su interacción con el entorno, tanto no escolar como escolar, pensados como espacios de significación y comprensión.. Discutiremos en los apartados siguientes algunas actividades acerca del contenido conceptual de la estructura aditiva y de las situaciones que ella modela.

Son varios los conceptos matemáticos involucrados en la estructura aditiva y por tal razón el desarrollo de pensamiento aditivo en el niño ocupa un gran período de tiempo, ya que debe cubrir la transición desde los recuentos informales y las estrategias propias que los niños realizan en el contexto no escolar, hasta el uso de datos numéricos memorizados y los algoritmos formales de la suma y la resta.

Por la importancia que para el desarrollo del pensamiento matemático escolar y en particular para la construcción de pensamiento numérico reviste la estructura aditiva, nos hemos propuesto desarrollar este capítulo que creemos contiene, discusiones teóricas y prácticas que un profesor - especialmente - el de primaria debe saber, en la medida en que le permite comprender cómo piensan sus alumnos a la vez que diseñar tareas que posibiliten la construcción del pensamiento numérico escolar.

Por la importancia que reviste el concepto problema aritmético elemental, lo abordamos inicialmente. Enseguida trataremos las situaciones que modelan "lo aditivo" y que se construyen en contextos de significación para el aprendizaje de los niños.

CASO 1

La profesora Francisca encuentra en un texto de matemáticas los siguientes problemas aritméticos:

"Luis tiene 9 canicas y Pedro 7, se ponen a jugar y Pedro le gana las 9 canicas a Luis. ¿Con cuántas canicas quedó Pedro?" y

"Pablo y Tomás tienen la misma edad. Pablo es mayor que Juanita, esta última nació después que Albert., Entre Pablo y Alberto, ¿quién es mayor?"

Ella trata de responder a la pregunta ¿cuál es la diferencia que hay entre esos dos problemas?

Francisca responde:

La diferencia radica en que el primero sí es un problema porque tiene una pregunta que se puede resolver con una operación El segundo no es problema porque no tiene datos y entonces no se puede saber cual operación aplicar para resolverlo.

1. Analice los problemas y dé una respuesta a la pregunta planteada.
2. Compare su respuesta con la de Francisca.
3. ¿Cuál cree usted que es el concepto de problema en el cual se basa la respuesta de Francisca?
4. ¿Cómo le explicaría a Francisca otra forma de comprender lo que es un problema?

2.1 LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS

En la literatura de la educación matemática se encuentran hoy en día con mucha frecuencia dos acepciones: problema y resolución de problemas. Para este trabajo se asumirá el término **problema** como una situación que debe ser modelada, en la cual está presente una pregunta - que se deriva de la misma situación - y el procedimiento y la solución no se obtienen de manera inmediata ni simple. Ahora bien, un problema sería entonces un tema que plantea un reto intelectual al cual el alumno esté dispuesto a dedicarle un tiempo para encontrar la solución; es por ello por lo que podemos asegurar que lo que es un problema para un nivel escolar no lo es en otro.

En cuanto a la consideración sobre la resolución de problemas, la entendemos como un proceso conformado por los diferentes modos de emprender las soluciones a una situación en la que está presente la incertidumbre (algo desconocido), como es el caso de la situación que es un problema. Para el aspecto que nos compete, en la resolución de un problema estarían involucrados diferentes fases que comprenden la reformulación del problema a otros términos (a símbolos, a gráficos, a expresiones que se refieren a hechos básicos del enunciado), una vez que se ha reformulado el problema en lo que podríamos denominar los términos "operatorios" se inicia la fase de elección de las estrategias para hallar la solución, en ella también la decisión sobre el método, la mejor solución, la más eficiente requiere de consideraciones sobre diferen-

tes alternativas y para ello es necesario identificar los elementos más simples del problema (los datos), una vez identificados la tarea siguiente consiste en encontrar las relaciones presentes, la estructura implícita, para luego construir el modelo que corresponda a la situación planteada, y a partir de la confrontación de dicho modelo, tanto con la situación que pretende modelar como con la teoría matemática dispuesta, se procederá a responder a la pregunta planteada.

En este capítulo se abordarán los problemas aritméticos elementales que se enseñan en la escuela. En tal sentido definiremos, lo que para nosotros significan. Entendemos por problemas aritméticos elementales, como aquellos problemas en los que se involucran para su solución operaciones aritméticas (especialmente suma, resta, multiplicación y división). Se dice que son problemas aritméticos elementales porque representan situaciones que se resuelven utilizando procedimientos en una o varias etapas y en los cuales se involucran diferentes operaciones aritméticas.

En términos generales un problema aritmético elemental de una etapa es aquel en el que aparecen tres proposiciones que involucran dos cantidades conocidas y una por encontrar. Por ello se puede decir que en todo problema aritmético elemental de una etapa se distinguen dos partes : la parte informativa y la parte de la pregunta. En la parte informativa se encuentran las proposiciones que contienen los datos conocidos del problema (cantidades dadas) y en la parte de la pregunta se averigua por una cantidad que debe encontrarse a partir de las cantidades dadas. Para encontrar la cantidad desconocida se usa una de las operaciones aritméticas.

Los problemas aritméticos se pueden analizar desde varios puntos de vista. Uno de ellos lo constituye la clasificación entre problemas de tipo verbal y problemas de tipo gráfico y/o numérico. Un problema de tipo verbal es aquel en el que se describen con palabras situaciones que plantean relaciones entre las cantidades propuestas y son posibles de resolver mediante una expresión aritmética. Los problemas numéricos piden al resolutor que realice cálculos entre las cantidades (sin medidas) planteadas en las expresiones dadas sin que tenga que interpretar textos. Los problemas de tipo gráfico son aquellos que mediante una representación se le pide al resolutor realizar una operación determinada.

Ejemplos de problemas de estructura aditiva :

Tipo de problema	Problema
Enunciado verbal	Sandra tiene 16 billetes de caramelos y se le perdieron 7 ¿cuántos billetes le quedan?
Numérico	Escriba en el espacio un número que sumado con 9 de como resultado 16 9 + ☐ = 16
Gráfico	¿Cuántas mariposas faltan en la fila de arriba para que en las dos filas haya la misma cantidad de mariposas ?

2.2 PROBLEMAS DE ENUNCIADO VERBAL

Los criterios que posibilitan analizar los problemas de enunciado verbal, tal como los describiremos en el apartado siguiente, los podemos comprender bajo diferentes perspectivas, abordaremos tres de ellas: las palabras involucradas en el enunciado, el análisis de tipo global ó semántico y el análisis de tipo sintáctico. Estos criterios pueden servir a los profesores como referentes para identificar los errores, las estrategias de solución de los niños, al tiempo que posibilita el diseño de tareas que potencian el aprendizaje significativo en los niños.

CRITERIO 1:

Análisis centrado en las palabras involucradas.

El primer tipo de análisis lo constituye el centrar la atención en el tipo de palabras y las funciones que ellas desempeñan en el enunciado. En los problemas verbales se distinguen dos tipos de palabras, las que informan sobre el contexto de la situación y las que determinan el tipo de operación a realizar. Ejemplo de ello sería :



"Luis juega canicas con Manuel. En el primer juego Luis gana 8 canicas a Manuel y en el segundo Manuel gana 3 canicas a Luis. ¿Cuántas canicas ganó Luis?"

Las palabras de contexto serían las de Luis, Manuel, canicas, juego, primero, segundo. La palabra que da la operación es gana.

En el lenguaje ordinario a este tipo de palabras se les conoce como "palabras clave", que tal como lo afirma Puig:

> "las palabras claves constituyen un conjunto heterogéneo de palabras que podemos dividir en tres grupos :
>
> 1. Palabras propias de la terminología matemática y, por tanto, con significado preciso en el contexto matemático(añadir, doblar, sustraer, dividir, repartir,...)
>
> 2. Palabras tales como conectivas, verbos, etc. que no son propias de la terminología matemática, pero cuyo significado en el contexto del problema suela ser suficiente para decidir la operación que hay que realizar para resolver el problema.
>
> 3. Palabras -o grupos de palabras- que expresan relaciones"[1]

Ejemplos de este tipo de análisis son :



Problema 1 : Camilo tiene 20 caramelos y los va a repartir entre sus 4 amigos, de tal manera que todos reciban la misma cantidad. ¿Cuántos caramelos recibirá cada uno ?

Problema 2 : En un salón de clase hay 40 niños. La maestra ha colocado la tarea en los cuadernos de 15 niños. ¿A los cuadernos de cuántos niños le falta por colocar la tarea?

[1] Puig, L. , Cerdán, F. Los problemas aritméticos escolares. Editorial Síntesis. Pág. 95

Problema 3 : Juan tiene 200 pesos más que Antonio. Si Antonio tiene 1000 pesos. Cuánto dinero tiene Juan ?

En el problema 1 la palabra repartir perteneciente al contexto de las palabras matemáticas, da el significado a la operación que se debe realizar.

En el problema 2 la palabra "falta" es la expresión que determina la operación a realizar.

En el problema 3 las palabras " más que" expresan la relación entre las dos cantidades involucradas en el problema y a la vez definen la operación ha realizar.

Una de las dificultades que tiene este tipo de análisis de los enunciados de los problemas es que se puede hacer de una manera rápida, literal y mecánica, sin tener en cuenta el contexto en que se encuentran dichas palabras claves, lo cual puede llevar a una solución errónea ; o en algunos casos, aunque la solución corresponda, la interpretación del problema será errónea o simplemente no se comprenderá. Tomemos dos situaciones :

Situación 1: La traducción literal del problema, en el que aparecen las palabras clave lleva a respuestas erróneas .



"Fabio tiene 2000 pesos y los gasta todos menos 100 pesos. ¿Cuántos pesos le quedan a Fabio? "

En el problema anterior pueden responder 1900 pesos, que corresponde a la solución : 2000 - 100 = 1900 , solución que responde a lo literalmente dicho en el enunciado

2000 "menos" 100 ¿Cuántos pesos le quedan a Fabio ?

lo que unido a la falta de atención en el momento de interpretar el problema y al afán de dar una respuesta lo lleva a una respuesta incorrecta.



"Luis tiene 8 canicas, jugando ganó algunas más y ahora tiene 12 ¿Cuántas canicas ganó ?"

Este problema lo pueden resolver algunos alumnos mediante una suma, por aparecer en el problema la palabra "más" y de acuerdo al orden en que las cantidades aparecen en el enunciado lo resolverían 8 + 12 = 20 solución que no corresponde a lo planteado en el problema.

El estudiante puede hacer el siguiente análisis al tratar de traducir el problema para encontrar la operación aritmética que sirve para resolver la pregunta planteada :

"Luis tiene 8 canicas, jugando ganó algunas más y ahora tiene 12.
¿Cuántas canicas ganó ?"
"Tiene 8 canicas" "ganó más" "tiene 12" Cuántas ganó"
"8" "más" "12" Cuántas ganó ?
8 + 12 = 20

Es claro que con la reflexión hecha, la respuesta no corresponde a la solución del problema.

Un problema en el que se involucra la palabra clave "repartir" es el siguiente :



" Si reparto 6 frutas a 3 niñas. ¿Cuántas frutas son ?

El esquema de análisis para este problema puede ser :

Si reparto 6 frutas a 3 niñas. ¿Cuántas frutas son ?
"Reparto", "6 frutas" , " 3 niñas". "¿Cuántas frutas son ?"
"reparto", "6" , "entre 3" "Cuántas"
6 dividido 3 = 2

lo que evidentemente constituye un equívoco, ya que no se dice que la repartición es equitativa.

Situación 2: La traducción del problema refleja la no comprensión del mismo, aunque la solución dé la respuesta correcta.



"Fanny tenía 25 bombas. Se le reventaron algunas y ahora tiene 10. ¿Cuántas se le reventaron ?

Es posible que los niños lo solucionen así : 25 - 10 = 15, sin embargo al solicitarles justificaciones poco pueden explicar acerca de su estrategia de solución. En los casos en que la explicación no corresponda a una interpretación correcta del problema, puede suceder que la traducción literal del mismo corresponda a la siguiente:

"Fanny tenía 25 bombas. Se le reventaron algunas y ahora tiene 10
¿Cuántas se le reventaron ?
"Tenía 25" , "reventaron algunas" , "10", "¿Cuántas ?"
"25" "reventaron" "10" "¿cuántos ?"
25 - 10 = 15

En este caso la solución corresponde pero al seguir el proceso de análisis se ve que el alumno deja de lado la pregunta sobre cuántas se le reventaron para quedar con un cuántas indefinible, puede decir cuántas pero no de qué.

CASO 2

A continuación se presentan problemas de tipo aditivo planteados por una profesora, así como la razón por la cual ella los considera diferentes.

Problemas	Diferencias
• Carlos presta a su compañero de puesto 9 colores y a su profesora 7 más que los que le prestó a su compañero. ¿Cuántos colores presta Carlitos a su profesora? • Al salir de la casa Sandra tenía 16 billetes de caramelos y regresó con 7. ¿Cuántos billetes le hacen falta? • María reparte colombinas a sus compañeros , 9 a Ana y 7 a Pedro. ¿Cuántas colombianas repartió en total?	El primero es de colores, el segundo de billetes de caramelos y el otro de colombinas. Esa es la diferencia.

- ¿Cuál cree que fue el criterio que tuvo en cuenta la profesora al explicar la diferencia entre los problemas verbales enunciados?
- ¿Qué cree que la profesora no tuvo en cuenta al dar la justificación de la diferencia de los enunciados de los problemas verbales elaborados?
- Después de realizar la lectura del apartado siguiente, realice una categorización de los problemas teniendo en cuenta la teoría estudiada.

CRITERIO 2 :
Análisis Semántico.

Recientemente los investigadores en educación matemática han mostrado un interés por realizar análisis teóricos sobre las estructuras aditiva y multiplicativa, así como promover estudios para investigar la adquisición de los conceptos y las relaciones entre ellos implicadas en dichas estructuras. Los autores que han proporcionado más aná-

lisis sobre este tema y que han sido consultados por nosotros son: Vergnaud, Nesher, Castro y Castro et al.

ESTRUCTURA ADITIVA

Se dice que un problema aritmético comporta una estructura aditiva si para su solución se requiere del uso de una adición. En este contexto la resta se clasifica como un tipo especial de adición. Se asume que una estructura aditiva es aquella estructura o relación que sólo está formada por sumas o sustracciones.

Para Vergnaud (1991) las estructuras aditivas son relaciones ternarias que pueden encadenarse de diversas maneras. Este autor presenta diferentes categorías para este tipo de estructuras:

Primera categoría: *dos medidas se componen para dar lugar a una medida*



"Carlos tiene 4 manzanas y 5 peras. ¿Cuántas frutas tiene en total ?"

El número de manzanas, peras y el total de las frutas corresponden a medidas del número de elementos de un conjunto. La ley de composición corresponde a la adición de dos números naturales y el resultado también es un número natural.

Segunda categoría: *una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida.*



"Antes de empezar a jugar Andrés tenía 8 canicas, ganó 5. ¿Cuántas canicas tiene ahora ?"

El número 8 representa un número natural, mientras que el 5 representa una transformación que opera sobre la medida de las canicas. La operación de adición para este caso corresponde a la suma de una medida con un número relativo, lo que da como resultado una medida.

Tercera categoría: *una relación une dos medidas*



"Gloria tiene 12 dulce, Luis tiene 7 menos. ¿Cuántos dulces tiene Luis ?

Las dos medidas son el número de dulces de Gloria y los de Luis. La relación es "tener 7 menos". La adición se hace sobre una medida y un número relativo para dar como resultado una medida.

Cuarta categoría: *dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación*



"Luis ganó 8 caramelos ayer y hoy perdió algunos. Si al final ganó 3 caramelos. ¿Cuántos perdió en total ?"

Las transformaciones corresponden a lo que ganó, lo que perdió y lo que perdió en total. Así, la adición corresponde a la composición de dos transformaciones (ganó 8, perdió algunos) para dar lugar a una nueva transformación (ganó 3 caramelos).

Quinta categoría: *Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.*



"Angélica le debe a Juan 1500 pesos, le devuelve 500. ¿Cuánto le debe ahora ?"

En este problema el estado relativo hace relación al debe 1500, la transformación le devuelve 500. Y la pregunta es por un nuevo estado relativo cuánto debe ?

Sexta categoría: *dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.*



"Julio le debe $2000 a José y éste a su vez le debe $1500 a Julio. ¿Cuánto le debe Julio a José ?"

Los números relativos en este problema corresponden a las cantidades debe 2000, debe 1500 y la respuesta a la pregunta hace relación a un nuevo estado relativo *debe a*.

Nesher elabora una clasificación basada en la estructura semántica, que le permite clasificar los problemas de estructura aditiva en : cambio, combinación y comparación.

Categoría de cambio: incremento o disminución de una cantidad inicial para crear una cantidad final (en estos problemas hay implícito una acción) lo desconocido puede ser cualquier cantidad o el incremento o la disminución.

Categoría de combinación: relación entre una colección y dos subcolecciones disyuntas (parte-todo) La combinación no implica cambio. Lo desconocido puede referir a cualquiera de las partes o al todo.

Categoría de comparación: comparación entre dos colecciones la relación se establece utilizando términos como "más que", "menos que" las tres cantidades que intervienen son: una el referente, otra el referido y otra la comparación.

Categoría de igualación: se produce alguna acción relacionada con la comparación entre dos colecciones disyuntas.

Tipo de problema	Problema
Combinación	En la escuela Patio Bonito 2 hay 7 niñas jugadoras de basketbool y 9 niñas jugadoras de fútbol. ¿Cuántas deportistas hay en total?
Cambio aumentar	Julio tiene 9 camisetas. Le regalan 7 camisetas más. ¿Cuántas reúne en total?
Cambio disminuir	La profesora tiene que ponerle tareas a 16 niños, 9 ya la tienen. ¿A cuántos niños les falta la tarea?
Comparación	Pilar tiene 9 hebillas y Julia 7 más que Pilar. Cuántos hebillas tiene Julia ?
Igualación	Julian tiene 9 lápices. Si Julian pierde 2 tendrá tantos como Antonia. ¿Cuántos lápices tiene Antonia?

CASO 3

A continuación se presentas tres problemas, dé las razones por las cuales son diferentes.

Problemas	Razones
• Como todas la noches Luis guarda sus gallinas en el corral.. Al otro día Luis encuentra sólo 28. ¿Cuántas gallinas se salieron del corral si sabe que son 45 por todas ? • En un potrero hay cierta cantidad de ganado entre toros y vacas. ¿Cuántas toros hay?. Si se sabe que hay 12 vacas y en total hay 23 reses. • En una caja hay 54 botones rojos y 19 botones negros más que rojos ¿Cuántos botones negros hay en la caja?	

CRITERIO 3:
ANÁLISIS DE LA SINTAXIS.

Esta categorización se base en encontrar el lugar de la variable desconocida (incógnita) en el problema. Cambiando la incógnita se generan seis sentencias abiertas en suma y otras seis en la resta

PARA LA SUMA	PARA LA RESTA
a + b = ?	a - b = ?
a + ? = c	a - ? = c
? + b = c	? - b = c
? = a + b	? = a – b
c = ? + b	c =? – b
c = a + ?	c = a -?

A continuación presentamos algunos problemas tipo de cada una de las situaciones planteadas.

Lugar de la incógnita	Problema
9+7 = ?	Luis tiene 9 años y Felipe 7. ¿Cuántos años tiene Camilo, si él tiene la edad de Luis y Felipe juntos ?
9 + ? = 16	Orlando trajo 9 carritos para regalar entre los niños del salón. ¿A cuántos niños le tiene que traer la próxima vez que nos visite si en total hay 16 niños ?
? + 7 = 16	¿Cuántos dulces le quedan a mi amigo, si se come 7 y sabe que tenía 16 ?

CASO 4

La profesora Lucy quiere que sus estudiantes resuelvan problemas utilizando materiales concretos (fichas, frijoles, tapas de botellas, palitos, etc.) y que luego realicen la representación gráfica de lo resuelto. También les pide a los niños que justifiquen cada una de sus respuestas.

Les propone los siguientes enunciados de problemas diferentes, utilizando los números 11, 8 y 19.

1. Luis tiene 11 colores azules y 8 amarillos ¿Cuántos colores tiene por todos?

2. Laura tiene 19 muñecos, si le regala a su hermanita 8 con ¿cuántos muñecos quedó Laura?

3. Antes de iniciar el juego Carlos tenía 11 canicas, jugando ganó algunas, si al finalizar el juego terminó con 19. ¿Cuántas canicas ganó?

4. Gloria tiene 11 libros y 8 cuadernos más que libros. ¿Cuántos cuadernos tiene Gloria?

- Usted ha decidido ayudarle a la profesora Lucy a corregir los trabajos realizados por los niños. ¿Cuáles son las representaciones que espera obtener en cada problema? ¿Cuál la explicación para cada caso?

- Durante el desarrollo del trabajo se presentó una discusión entre Felipe y Carlos, alumnos de la profesora Lucy, por el número de fichas que necesitaban para representar la solución del cuarto problema. Felipe afirma que se necesitan 19 fichas, pero Carlos le sostiene que no, que se necesitan más fichas. Con relación a la discusión, ¿con cuál de los estudiantes está usted de acuerdo y cómo le ayudaría a ese alumno para convencer al otro de la bondad de su argumento?

2.3 MODELOS DE REPRESENTACIÓN

Tal como lo afirma Llinares (1994) una de las tareas que debe desarrollar un profesor en la actualidad es propiciar “diferentes niveles de comprensión matemática” en los alumnos. Dicha comprensión está relacionada, según autores como Piere y Kieran, citados por Llinares, con el uso de referentes concretos y la generación de imágenes mentales por parte de los estudiantes. Consecuencia de ello, una de las competencias del profesor es el uso de diferentes modos de representación que le ayuden a los alumnos a comprender los conceptos y procedimientos matemáticos en discusión.

Entendemos por modos de representación, los referentes concretos, gráficos, situaciones, etc. que sirvan para potenciar la comprensión matemática de un concepto ó un procedimiento en los que aprenden. En éste capítulo presentaremos, sin ahondar en detalles, algunos de los modelos de representación gráfica que se usan para representar las operaciones aritméticas.

Para representar las adiciones y las restas se emplean muy comúnmente los denominados modelos lineales, los modelos cardinales, con medidas y funcionales. En este caso solo usaremos los modelos gráficos denominados lineales y cardinales, debido a que son, desde nuestro punto de vista los más usados en la primaria. Por supuesto, todo el material concreto disponible que ayuda a la comprensión de las operaciones aritméticas pueden ser el primer modo

de representación usado por el profesor, pero en este capítulo no se hará relación a él.

Modelos para estructura aditiva

Citado por Castro et al (1988), Resnick asegura que la recta numérica es esquema mental que involucra tanto el aspecto cardinal como el ordinal del número, al menos en lo que respecta a cantidades pequeñas.

Un ejemplo de este modelo es el siguiente :

> **"En un bus viajan 15 pasajeros y en otro 5 más que en el primero. ¿Cuántos pasajeros viajan en el segundo bus ?**

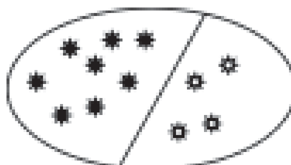


Se da una cantidad y el exceso de otra para hallar una segunda cantidad.

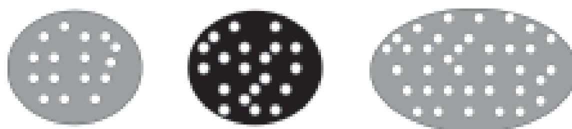
15 + 5 = 20

Una segunda clase de modelos que representan las operaciones son los denominados modelos cardinales, que usan los diagramas de la teoría de conjuntos, para representar el todo y las partes de un conjunto.

> **"En un salón hay 12 lámparas encendidas. Se apagan 8. ¿Cuántas lámparas quedan encendidas?"**



"En el curso primero Azul hay 16 alumnos y en el primero verde hay 20. ¿Cuántos alumnos hay entre los dos grupos?



CASO 5

Un profesor propone el siguiente problema a sus estudiantes pidiéndoles que lo desarrollen haciendo uso de representaciones gráfica y numérica..

Una volqueta sale del depósito a repartir los pedidos de ladrillo que les habían hecho hasta el momento, el primer pedido que dejó fue de 200 ladrillos, en el segundo pedido deja 50 ladrillos menos que en el primero y en el tercer sitio deja 35 ladrillos menos de los que había dejado en los dos sitios anteriores juntos. ¿Cuántos ladrillos ha dejado en cada uno de los tres sitios? ¿Con cuántos ladrillos salió del depósito?

- ¿Cuántas situaciones están involucradas en el enunciado? A qué categorías (sintáctica, semántica) corresponden?
- ¿Cuál seria una solución usando representaciones concreta , gráfica y numérica?
- Diga qué estrategias de solución pueden usar los niños para resolver el problema?
- Diga los posibles errores que espera encontrar cuando los niños traten de resolver el problema.
- ¿Qué conocimientos necesita tener un niño para poder darle solución al problema ?

2.4 PROBLEMAS DE VARIAS ETAPAS

En este apartado vamos estudiar problemas, que para su solución requieren más de una operación (suma o resta) es decir reflejan más de una situación en un mismo enunciado.

Los problemas de varias etapas pueden ser solucionados de diferentes maneras y requieren de la suficiente atención y la elaboración de un plan para resolverlo. El proceso de resolución y las posibles estrategias que usan los niños deben ser una cuestión que los profesores puedan anticipar a la hora de proponer problemas a sus alumnos. Mostraremos a continuación un ejemplo sencillo:

> **"Amparo tiene ahorrada cierta cantidad de dinero. Con ese dinero más los $2.000 que le regala su tía, compra una hamburguesa que le cuesta $2.800. Si después de la compra tiene $700, ¿cuánto dinero tenía ahorrado Amparo?**

Un plan para resolverlo:

1. Un posible procedimiento para plantearlo:

? + 2000	lo que tenía ahorrado más lo que le dieron
? + 2000 - 2800	lo que completó menos lo que gastó
? + 2000 - 2800 = 700	lo que le queda

Posibles procedimientos de solución:

1.

$\boxed{\square + 2000} - 2800 = 700$ ¿Qué número había antes de restar 2800?

$\Downarrow$ 3500

$\boxed{?} + 200 = 3500$ ¿Qué número había antes de sumar 2000?

$\Downarrow$ 1500

2.

$\boxed{?}\ \boxed{+ 2000} - 2800 = 700$

$\Downarrow$ -800

Si al número que busco, primero le sumo 2000 y luego le resto 2800 es como si le hubiera restado 800

$\boxed{?} - 800 = 700$

$\Downarrow$ 1500

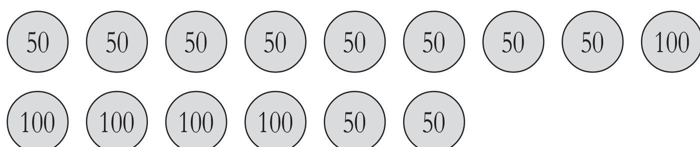
¿Qué número había antes de restar 800, para que dé 700?

Otro tipo de problemas de varias etapas que consideraremos son aquellos que tiene más de una solución. El siguiente es un ejemplo de uno de ellos:

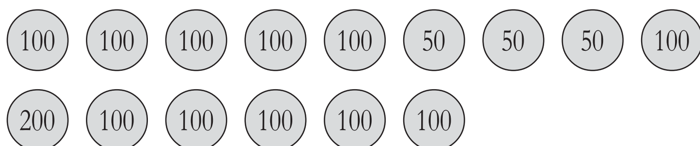
> **“ En una escuela rural dos niños de tercero, hacen cuentas sobre el dinero que cada uno de sus dos compañeros, Felipe y Pedro, puede tener. Saben que Felipe tiene 9 monedas y Pedro tiene tres monedas menos que Felipe y además que ambos tienen la misma cantidad de dinero”**

Anita y Luisa muestran a su profesora los procedimientos de solución que han empleado para adivinar el dinero que tienen Felipe y Pedro. El profesor sólo pudo ver una parte de lo que cada uno de los procedimientos elaborados:

Anita:



Primera solución de Ana: $ 500 cada uno



Segunda solución de Ana: $ 700 cada uno

Por su parte Luisa muestra el siguiente procedimiento:

Primera solución de Luisa:
4 de 500, 4 de 200 y 1 de 100 da $2900
2 de 1000, 1 de 500, 1 de 200, 2 de 100 da $2900

Segunda solución de Luisa:
5 de 100, 4 de 50 da $700
1 de 200, 5 de 100 da $700.

¿Podría usted explicar la diferencia entre los procedimientos presentados por las dos niñas?
¿Podría esperar más soluciones, cuántas, cómo está seguro que son todas ?
¿Podría presentar un proceso de solución del problema, diferente a los que realizaron las niñas?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castro E., Rico, L. y Castro, E. (1988) Números y Operaciones. Madrid :Síntesis.

Castro E. , Rico, L. y Castro, E. (1995) Estructuras aritméticas elementales y su modelización.. Bogotá :Iberoamérica

Dickson, L. Brown, M y Gibson, O.(1991) El aprendizaje de las matemáticas. M.E.C. Madrid :Labor.

Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos Curriculares (1998). Santa Fe de Bogotá: MEN.

Llinares, S. (1991). La naturaleza de la comprensión de las nociones matemáticas. Variable en la formación de Profesores de Matemáticas. En: C.Marcelo y otros (Eds). *El estudio de casos en la formación del profesorado y la investigación didáctica*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Llinares,S. (1993) Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje. En L. Montero y J.M.Vez (eds) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Santiago :Tórculo.

Llinares, S. , Sánchez, V. y Garcia, M. (1994): Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. Revista de Educación No. 304. Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Puig. L. y Cerdán, F. (1988) Problemas aritméticos escolares. Madrid :Síntesis.

Vergnaud, G. (1991) El Niño, Las Matemáticas y la Realidad. México :Trillas.

ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA Y FORMACIÓN DE PROFESORES PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA

3

CAPÍTULO tres

Jorge Orlando Lurduy O.
Jaime Humberto Romero C.

Profesores Universidad Distrital Francisco José de Caldas

El grupo de investigación «Matemáticas Escolares" conformado por profesores del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, dada su naturaleza ha venido implementando, reflexión, y revisión bibliográfica en torno a algunos temas de la educación matemática y de la matemática escolar. Miembros de este grupo, realizamos este escrito como una manera de participar a los posibles lectores algo de lo que hemos aprendido.

Empezamos diciendo que estamos de acuerdo con la petición presente en los lineamientos curriculares: hoy el estudiante debe aprender mediante la resolución de problemas. Aunque esta petición recae sobre los estudiantes de los colegios, indirectamente crea un mandato sobre los estudiantes de las instituciones formadoras de profesores cuyo ámbito de desempeño será justamente, los colegios, pero también recae sobre los actuales profesores de la educación básica y de la media vocacional.

Este enfoque nos ha llevado a proponer que el futuro profesor deberá formarse a través de resolución de problemas, y que los problemas que habrá de construir y abordar serán los del profesor. En particular, como el profesor enseñará matemáticas en la escuela básica, algunos de sus problemas tendrán que referir la enseñanza de las matemáticas allí. Por lo tanto, los problemas que nuclearán su formación no son de matemáticas; aunque, obviamente, este tipo de problemas no se excluye de su formación. Esto quiere decir que el futuro profesor, a través de la resolución de problemas construirá saber como producto de conocimiento teórico práctico acerca de:

- La historia, como objeto de enseñanza, del objeto que habrá de enseñar; es decir, sobre la historia de las representaciones y recursos instruccionales que han estado presentes en la actividad de los profesores cuando enseñan este objeto.

- La historia del objeto de enseñanza visto como objeto de las matemáticas (historia y epistemología).

- La historia del objeto de enseñanza como objeto curricular, incluyendo los fines que se le adjudican dentro de los propósitos educativos y de formación.

- El objeto de enseñanza como objeto de aprendizaje. (obstáculos epistemológicos, estructuras de pensamiento).

- Del lenguaje teórico de las matemáticas, de sus formas argumentativas, de sus formas de estructuración y construcción. Es decir, deberá saber la historia y epistemología de las matemáticas. Y todo esto habrá de aprenderlo en función de su profesión y de lo que la caracteriza distinguiéndola de las otras profesiones; esto es, la enseñanza.

Aquí presentamos parte de la elaboración y estudio realizado por el grupo en el tema **estructura multiplicativa,** que a su vez es un elemento de lo que hemos denominado **pensamiento aritmético**. Por otra parte, estos son temas que la investigación y la teoría decantada de la educación matemática ha reconocido como pilares de la matemática que se enseña en la escuela, llamada **matemática escolar**, que es referente fundamental en la formación

profesional del profesor de matemáticas para la educación básica.

El enfoque metodológico que practicamos en nuestra labor docente e investigativa es el de **resolución de problemas**, una de cuyas posibilidades es el **estudio de casos**. En este escrito disponemos elementos de análisis y discusión de tres casos, que nos permiten presentar desde nuestra perspectiva teórica y metodológica algunas concepciones de profesores en torno al papel del problema en la organización de la clase; al significado del problema; al significado de la multiplicación; a su valoración como resolutor de problemas; al sentido de su profesión; y, al origen del conocimiento matemático de los escolares. Sugerimos al lector analizar y participar en la discusión sobre la situación problémica, y si es posible y le interesa, escribirla y remitirnosla, o discutirla con otros colegas y profesores.

3.1 SITUACIÓN PROBLÉMICA

En el seminario sobre problemas aritméticos escolares, de profesores que se desempeñan en la Educación Básica en centros educativos urbanos y rurales del departamento de Cundinamarca, se presentó la siguiente situación:
El moderador de la reunión propone analizar y resolver individualmente, y después en grupo, los siguientes casos:

Caso No 1

Andrea, la profesora de tercero de primaria está planteando la clase de matemáticas para el siguiente día. Está tratando de formular una situación que le de sentido a la actividad que han de desplegar los niños al abordar la multiplicación. Así, pensando en los juegos que hacen los niños, evoca a Juan y Margarita (dos de sus alumnos) a quienes vio durante el recreo del día anterior intercambiándose, al final de un juego de bolas, esas bellísimas esferas multicolor. Recuerda haberse sorprendido con el negocio convenido: Juan aceptó darle tres canicas de tamaño normal a Margarita por cada canica diminuta que la niña le entregara. Andrea sonrió mientras pensaba "los niños no son bobos, ellos intercambian belleza… y como si fuera poco me han dado la situación que andaba buscando".

- ¿Cree usted que esta situación le es útil a la profesora para iniciar a los niños en la multiplicación?

- Si no es útil para iniciarlos ¿En qué momento de la enseñanza de la multiplicación sería aprovechable dicha situación? ¿Usted cómo aprovecharía esta situación con sus estudiantes de tercer grado?

Caso No 2

Martín nunca había dudado que su profesor, el viejo Romero, como solían llamarlo él y sus compañeros de curso, le dijo la verdad cuando le enseñó a multiplicar: *"la multiplicación es una suma abreviada"*. Martín, que hoy también es profesor en básica primaria, inicia sus lecciones acerca de la multiplicación con la misma afirmación de su profesor. Sin embargo, este año, luego de explicar cómo se encuentra el área del rectángulo, pidió a los niños que hallaran el área del rectángulo de tres metros de ancho y cuatro metros de largo. Carlos le hizo una pregunta que lo puso a dudar de la verdad que él le había adjudicado a la afirmación del viejo Romero.

profe: ¿Qué quieres Carlitos?

Carlitos: Es que yo hice esto 3m + 3m + 3m + 3m = 12 m. Pero Ana dice que el área es 12 metros cuadrados y yo no entiendo de dónde salen los metros cuadrados.

- ¿Cuál cree usted que es la duda del profe Martín?
- ¿Cómo le ayudaría usted a Martín a salir de la duda?
- ¿Cómo le ayudaría usted a Carlitos?

Caso No 3

Angelita y Gustavo, profesores del grado tercero, están charlando a la hora del descanso sobre los problemas de

multiplicación que ellos pensaron, cuando prepararon la clase de matemáticas sobre multiplicación. Angelita ya trabajó con sus muchachos a primera hora y el profesor Gustavo va a tener clase, en seguida, después del recreo. En uno de los problemas, a los niños y niñas de Angelita, les dio tres respuestas diferentes, otros no pudieron entender el problema, y otros lo entendieron pero no lo pudieron resolver. El problema decía:

> *"En un campeonato de fútbol se sabe que el equipo A tiene tres veces más partidos ganados que el equipo B y la mitad de partidos ganados que el equipo C. Si el equipo C ha ganado 10 partidos, ¿cuántos partidos ganados tiene cada equipo?"*

- ¿Cuáles cree usted fueron las dificultades en la clase de los niños y niñas de Angelita, para resolver el problema? Enúncielas

- Gustavo, que es licenciado en matemáticas, después de escuchar a Angelita decide explicar el problema en clase, ya que para él no tiene porqué presentarse tanta dificultad, pero al leerlo detenidamente no se le ocurre que hacer ni cómo hacer la explicación del problema. ¿Cómo le ayudaría usted al profesor Gustavo?

3.1.1 Síntesis de una relatoría

En las polémicas grupales y colectivas se explicitaron posturas y temas de discusión, que de diferentes maneras están relacionados con los problemas de la profesión "ser profesor de matemáticas" (aquellas situaciones que para un docente de matemáticas son problema y merecen ser

resueltos, cuando se desempeña como docente de niños y niñas de la Educación Básica) y con las posibles soluciones.

Buena parte de la discusión se refirió al enunciado del problema del caso No 3. ¿Porqué cree usted que eso pasó?. El relator del seminario organizó las ideas que "emergieron" con más relevancia, en la discusión de los tres casos así: ideas que son manifestaciones acerca del papel del problema en la organización de una clase; de lo que se entiende por problema; de lo que se entiende por multiplicación; de la valoración que se tiene de sí mismo como resolutor de problemas de matemáticas; del sentido de su profesión; y, del conocimiento.

Manifestaciones acerca del papel del problema en la organización de una clase:

1. Al niño se le debe enseñar que metros por metros da metros cuadrados, eso es de potenciación y parece que él no conoce los símbolos y los elementos de la potenciación.

2. El profesor Martín debe hacer primero una clase de geometría sobre áreas y perímetros.

3. Yo le enseñaría las medidas de longitud y el sistema métrico decimal, midiendo cosas y haciendo un metro cuadrado del tamaño natural para que lo vea y entienda que metros por metros da metros cuadrados.

4. Los números, que representan cantidades, son siempre los mismos, ¿para qué mirar el significado de las

cantidades que intervienen si siempre la respuesta es un número?.

5. Yo haría varias sumas repetidas de las canicas con acciones y objetos reales (fríjoles, granos, etc.).

6. El problema de los niños del caso No 1 es que ellos vean que hay una relación entre lo que cada uno tiene y la forma de intercambiarlo y aquí la belleza sí es un valor lo mismo que el tamaño de las canicas. Este aspecto es importante para establecer la relación de cambio.

7. No es la misma clase de acción lo que los niños hacen en el caso No 1 y en el caso No 2, pues por hacer las sumas repetidas el niño del caso No 2 es que no entiende.

8. Si en el caso del área el niño hace la suma repetida de cuadraditos pequeños, pues le da los doce cuadraditos y de ahí sale el carácter de metros cuadrados de área.

9. El problema no es si los cuadrados son pequeños o grandes, sino cómo llega a ellos, y lo que yo creo es que el profesor Martín le debe explicar a Carlitos que está multiplicando dos "cosas" distintas, el largo y el ancho y que le da otra cosa que es área y que las "cosas" se deben analizar.

10. El problema del caso No 3 se debe solucionar de manera que la respuesta sea un número natural y/o entero, porque eso es lo que los niños tienen que saber en primaria.

Manifestaciones acerca de cómo podría ser el papel del problema en la organización de una clase

1. Los niños tienen formas de comunicación y relación que nosotros los profesores no conocemos.

2. El intercambio es una manera de implementar "nuevas" relaciones entre las personas y a partir de ello generar situaciones educativas y formativas, específicamente en matemáticas sería de mucha utilidad.

Manifestaciones acerca de lo que se entiende por problema

- **El problema es una aplicación numérica de una teoría anteriormente aprendida**

1. Los números, que representan cantidades, son siempre los mismos, ¿para qué mirar el significado de las cantidades que intervienen si siempre la respuesta es un número?.

2. El problema no es si los cuadrados son pequeños o grandes sino como llega a ellos, y lo que yo creo es que el profesor Martín le debe explicar a Carlitos que está multiplicando dos "cosas" distintas, el largo y el ancho y que le da otra cosa que es área y que las "cosas" se deben analizar.

3. El problema del caso No 3 se debe solucionar de manera que la respuesta sea un número natural y/o entero, porque eso es lo que los niños tienen que saber en primaria.

4. Es posible explicarse el problema del caso No 3 a partir de la representación que haga de él y así el niño o la niña lo van a entender mejor.

- **El problema debe tener un enunciado claro y preciso**

1. El problema del caso No 3, está mal planteado, por tanto no tiene solución.

2. Todos los problemas de matemáticas tienen la misma forma: Los datos, la forma como se relacionan los datos y una pregunta final.

3. El problema del caso No 3. se debe solucionar de manera que la respuesta sea un número natural y/o entero, porque eso es lo que los niños tienen que saber en primaria.

4. La mejor manera de solucionar un problema es interpretando y analizando las palabras que en él intervienen, por ejemplo en este problema [el caso 3] cuando se dice "tres veces más", se sabe que esta parte es de multiplicación, y cuando se dice la mitad esa parte se hace dividiendo, el problema es de multiplicación y de división.

- **El problema puede admitir varias interpretaciones**

1. El enunciado de este problema tiene por lo menos dos formas de ser entendido: de acuerdo con la manera como sea leído (tonos y énfasis) y de acuerdo con la intención de la lectura.

2. El problema no está mal planteado, pero puede ser interpretado de dos maneras diferentes, dependiendo de cómo sea interpretado, el problema tiene solución.

- **El problema genera conocimiento nuevo**

1. El problema de los niños del caso No 1 es que ellos vean que hay una relación entre lo que cada uno tiene y la forma de intercambiarlo y aquí la belleza sí es un valor lo mismo que el tamaño de las canicas. Este aspecto es importante para establecer la relación de cambio.

2. Si en el caso del área el niño hace la suma repetida de cuadraditos pequeños, pues le da los doce cuadraditos y de ahí sale el carácter de metros cuadrados de área.

3. El problema es importante porque es una situación de la vida diaria del niño y ello le conviene para poder aprender a solucionar problemas, para practicar las operaciones, las tablas, que es lo que le sirve para la vida.

- **El problema modela acciones humanas**

1. No es la misma clase de acción lo que los niños hacen en el caso No 1 y en el caso No 2, pues por hacer las sumas repetidas el niño del caso No 2 es que no entiende.

2. Como las acciones de todos los casos son distintas se deben trabajar de diferente manera aunque todas estén referidas a la operación de multiplicación.

3. El problema de los niños del caso No 1 es que ellos vean que hay una relación entre lo que cada uno tiene y la forma de intercambiarlo y aquí la belleza sí es un valor lo mismo que el tamaño de las canicas; este aspecto es importante para establecer la relación de cambio.

4. Si en el caso del área el niño hace la suma repetida de cuadraditos pequeños, pues le da los doce cuadraditos y de ahí sale el carácter de metros cuadrados de área.

5. El problema es importante porque es una situación de la vida diaria del niño y ello le conviene para poder aprender a solucionar problemas, para practicar las operaciones, las tablas, que es lo que le sirve para la vida.

Manifestaciones acerca del conocimiento del profesor sobre la multiplicación

1. De acuerdo con lo anterior, o, independientemente de ello, el problema [refiriendo el del caso 2] es de adición o de multiplicación.

2. Sí, es de multiplicación y como la multiplicación es una suma repetida, el problema es de suma.

3. En nuestras clases dedicamos mucho tiempo y energía a las tablas de multiplicación y su memorización, porque eso es lo que sabemos de la multiplicación y nos facilita el trabajo.

4. Una persona que sabe bien las tablas de multiplicar, sabe lo mínimo para desempeñarse en la vida y poderse relacionar con los demás de una manera útil.

5. El problema es importante porque es una situación de la vida diaria del niño y ello le conviene para poder aprender a solucionar problemas, para practicar las operaciones, las tablas, que es lo que le sirve para la vida.

Manifestaciones del profesor como resolutor de problemas de matemáticas

- **El que debe saber sobre resolución de problemas matemáticos es el matemático, el profesor no tiene porque saber todos los detalles**

1. El problema sí tiene solución porque un matemático, que está en esta reunión, la encontró y ellos piensan y sí saben resolver problemas, porque saben matemáticas pues eso es lo que estudiaron y es lo que saben hacer: matemáticas.

2. El matemático lo resuelve haciendo una multiplicación y después que la respuesta dé y que el niño la entienda, el papel de los profesores es hacerle entender, con los métodos adecuados.

3. Si los números que intervienen son naturales, entonces los números son enteros y es lo mismo y no hay necesidad de complicarle la vida a los niños y niñas con tanta discusión sobre los números. Las cantidades se usan de la misma forma.

Manifestaciones acerca del sentido de la profesión

- **Lo que el profesor necesita saber es un método adecuado para enseñar las producciones de los matemáticos**

1. El matemático lo resuelve haciendo una multiplicación y después que la respuesta dé y que el niño la entienda, el papel de los profesores es hacerle entender, con los métodos adecuados.

2. Si los números que intervienen son naturales, entonces los números son enteros y es lo mismo y no hay necesidad de complicarle la vida a los niños y niñas con tanta discusión sobre los números. Las cantidades se usan de la misma forma.

3. Yo haría varias sumas repetidas de las canicas con acciones y objetos reales (fríjoles, granos, etc.).

- **El profesor no debe problematizar a los estudiantes con el significado de las cosas concretas, basta con trabajarles desde lo numérico**

1. Los números, que representan cantidades en todos los casos, son siempre los mismos, para qué mirar el significado de las cantidades que intervienen si siempre la respuesta es un número.

2. Si los números que intervienen son naturales, entonces los números son enteros y es lo mismo y no hay necesidad de complicarle la vida a los niños y niñas con tanta discusión sobre los números. Las cantidades se usan de la misma forma.

3. El problema no es si los cuadrados son pequeños o grandes sino cómo llega a ellos, y lo que yo creo es que el profesor Martín le debe explicar a Carlitos que está multiplicando dos "cosas" distintas, el largo y el ancho y que le da otra cosa que es área y que las "cosas" se deben analizar.

- **Al niño se le debe enseñar mostrándole acciones con objetos concretos**

1. Yo haría varias sumas repetidas de las canicas con acciones y objetos reales (fríjoles, granos, etc.).

2. Si en el caso del área el niño hace la suma repetida de cuadraditos pequeños, pues le da los doce cuadraditos y de ahí sale el carácter de metros cuadrados de área.

- **El niño puede aprender a través de abordar el problema**

1. El problema de los niños del caso No 1 es que ellos vean que hay una relación entre lo que cada uno tiene y la forma de intercambiarlo y aquí la belleza sí es un valor lo mismo que el tamaño de las canicas, este aspecto es importante para establecer la relación de cambio.

2. No es la misma clase de acción lo que los niños hacen en el caso No 1 y en el caso No 2, pues por hacer las sumas repetidas el niño del caso No 2 es que no entiende.

- **Cuando el profesor piensa acerca de un problema matemático que va a llevar al aula, no está pensando un problema pedagógico**

1. En los casos 1 y 2 los problemas son de tipo "pedagógico", mientras en el caso 3, el problema es de matemáticas.

- **Concepciones acerca del origen del conocimiento matemático de los alumnos y el papel que en ello juega la enseñanza**

Al analizar las diversas posiciones manifestadas por los profesores respecto de los problemas matemáticos propuestos en los tres casos, es posible vislumbrar dos concepciones respecto del origen del conocimiento matemático de los alumnos:

1. El profesor lo detenta y lo enseña directamente a través de su palabra

> *«El problema no es si los cuadrados son pequeños o grandes sino cómo llega a ellos, y lo que yo creo es que el profesor Martín le debe explicar a Carlitos que está multiplicando dos "cosas" distintas, el largo y el ancho y que le da otra cosa que es área y que las "cosas" se deben analizar».*

2. El profesor lo detenta y lo enseña a través de acciones concretas sobre objetos concretos para que el estudiante imite sus acciones

> *«El problema es importante porque es una situación de la vida diaria del niño y ello le conviene para poder aprender a solucionar problemas, para practicar las operaciones, las tablas, que es lo que le sirve para la vida»*
>
> *«Yo haría varias sumas repetidas de las canicas con acciones y objetos reales (fríjoles, granos, etc.)».*

3. El estudiante lo construye a través de sus acciones sobre situaciones problémicas

> *«El problema de los niños del caso No 1 es que ellos vean que hay una relación entre lo que cada uno tiene y la forma de intercambiarlo y aquí la belleza sí es un valor lo mismo que el tamaño de las canicas. Este aspecto es importante para establecer la relación de cambio».*

> *«No es la misma clase de acción lo que los niños hacen en el caso No 1 y en el caso No 2, pues por hacer las sumas repetidas el niño del caso No 2 es que no entiende».*

Es decir, a pesar de las distintas posturas manifestadas por los profesores -hecho que no es de manera alguna simple, y que tiene consecuencias, tampoco simples, a propósito de la manera en que fluye la vida en el aula- estas posiciones tienen en común la aceptación implícita de que el conocimiento matemático de los estudiantes proviene de afuera, ***cambia sólo el método mediante el cual los profesores hacen el ejercicio de transferirlo desde su lugar natural hacia el interior de sus estudiantes.***

Tal comprensión del origen del conocimiento matemático de los estudiantes, hace de la profesión del profesor un ejercicio bastante instrumental, al hacer superflua por innecesaria, toda reflexión que tienda a rescatar la conversación en el aula como acontecer que signe, signifique, y determine lo que en ella ocurra.

Con la intención de aportar otros elementos para tematizar esta visión externalista del conocimiento, de continuar con la conversación iniciada durante el seminario antes referido, y de exponer argumentos desde los cuales abogar por la dignificación del conocimiento que los escolares (niñas, niños y jóvenes) aportan cuando entran a las aulas, presentamos varias construcciones teóricas, con pequeños comentarios nuestros, al respecto de la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación.

3.2 EL APORTE COGNITIVO Y DIDÁCTICO DE GERARD VERGNAUD

Nos parece importante detenernos en el análisis de la propuesta del francés Gerard Vergnaud, dado que este autor profundiza y sintetiza diversas corrientes y caminos didácticos y cognitivos de las estructuras operatorias, y por lo que expresa en su propuesta de "los campos conceptuales", teoría a nuestro parecer sugerente y poderosa.

La teoría de los campos conceptuales "apunta a una visión del desarrollo cognitivo en términos de formación de conceptos, en la relación de unos con otros". Esta relación se manifiesta por filiaciones o continuidades y por formar sistemas. Pero, aunque insiste sobre las continuidades también refiere rupturas, discontinuidades en esas relaciones.

En su elaboración, Vergnaud (1990), recoge ideas de Piaget y Vigotsky, fundamentalmente las nociones que elaboró Piaget, de esquemas e invariantes, así como la de mediación del lenguaje a través de las personas o los símbolos, enunciada y desarrolladas por la escuela socio cultural de Moscú.

Los problemas que plantea este autor están relacionados con los del vínculo entre un conocimiento y los problemas teóricos y prácticos a los cuales responde ese conocimiento; consecuentemente, aborda su trabajo en una si-

tuación real, la de un aula escolar. Como es evidente allí, de las relaciones de tipo pedagógico, enfatiza las didáctico-cognitivas, y entonces el lenguaje juega un papel muy importante para la construcción de los conceptos, pero no constituye por sí mismo el criterio decisivo del pensamiento conceptual.

En esta dirección, el pensamiento sólo es conceptual si obedece a criterios de orden teórico y práctico simultáneamente. Un discurso teórico no es conceptual, tampoco una simple conducta, a menos que aquel dé lugar a una conducta adaptada a la situación.

Igualmente, adoptando un criterio pragmático para pensar el pensamiento, Vergnaud define los campos conceptuales y señala sus componentes: el concepto, para ser tal, requiere ser operativo, es decir, debe permitir abordar soluciones; el criterio decisivo del pensamiento conceptual es su puesta en relación con conductas, la posibilidad de una respuesta a un problema.

Un campo conceptual es "un conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica esquemas, conceptos y teoremas en estrecha conexión, así como las representaciones del lenguaje y simbólicas susceptibles de ser utilizadas para representarlos". (Vergnaud, 1990)

En el párrafo anterior se reconocen los tres contenidos básicos de un campo conceptual: situaciones (o referentes), conocimientos (o significados) y representación simbólica; referentes, significados y significantes vinculados en una compleja red de relaciones de interacción que conforman un campo de pensamiento operatorio de la persona; permitiéndole descubrir analogías y filiaciones, in-

tegrar sistemas, captar rupturas, actuar en la situaciones y anticipar nuevas situaciones posibles.

Las situaciones

El primer contenido básico del campo conceptual planteado por Vergnaud, es el de las situaciones o referentes (contextos, medios ambientes), que conforman un campo de pensamiento operatorio de las personas. Todo concepto adquiere sentido en función de las múltiples situaciones en que aparece. Es posible identificar dos clases de situaciones:

- En la que, para interpretarla, el individuo dispone (o cree que dispone) de las competencias necesarias para tratarlas, en cuyo caso las conductas son automáticas.

- En la que el individuo, durante un tiempo duda y reflexiona, presentándose el surgimiento de variados esquemas que se acomodan, descomponen y recomponen. Es decir, se equilibran y desequilibran.

Las dos clases de situaciones mencionadas anteriormente se caracterizan por su diversidad, pluralidad y por su historia. La pluralidad y diversidad de las situaciones le permite al sujeto que las vive, concebir el conjunto de posibilidades que se abre en cada caso y su clasificación, dejando camino al análisis, a la descomposición de la situación en elementos simples y a la combinación de estas posibilidades. El otro aspecto de las situaciones es su historia, el progresivo dominio de las continuidades, que va dando sentido a los conceptos que se forman, se descubren semejanzas tanto como diferencias..

Desde el punto de vista de la didáctica de la matemática, vemos que, en cuanto a la variedad, la vida escolar ofrece un número limitado de casos que se repiten, y los datos importantes de esas situaciones se encuentran en un cúmulo de informaciones, confundidos con otros pertinentes que oscurecen las preguntas que se deben formular. Esto dificulta establecer una clasificación sistemática de las tareas cognitivas por plantear, pero se hace necesario superar esta situación, para identificar las relaciones básicas a partir de las que se generan los problemas de carácter matemático.

Desde el punto de vista de la historia de las situaciones, aquellas en las que se disponen los conceptos matemáticos potentes (como por ejemplo el de proporcionalidad, concepto que juega un papel muy importante en las relaciones multiplicativas) son las que permiten las inferencias y las articulaciones de nuevos hechos en la red de los esquemas cognitivos anteriormente construidos.

Afirmar que las situaciones tienen historia, es afirmar que las personas que las viven tienen memoria, pero que esta memoria es relacional; es decir, no accionamos un botón para recordar algo en especial. Nuestra memoria funciona en relación con grandes trozos de nuestra experiencia de vida, organizando los elementos y sus relaciones jerárquicamente, según la importancia percibida por quien tiene esa experiencia.

Desde la biología, la identificación de analogías y diferencias es un requerimiento para la vida (es obvio que un tigre reconoce una gacela y su mayor o menor lentitud, y una gacela reconoce la separación necesaria para supervivirle al tigre). Para los seres humanos, la ventaja

básica está en la posibilidad de extender este mundo de experiencias concretas hacia un mundo de experiencias posibles, no tenemos que vivirlo todo para saber cómo algo podría ser. Sin embargo, la flexibilidad de las experiencias, situaciones vividas, es una necesidad para que nuestro pensamiento también sea flexible. De esta manera, es posible extender nuestro pensamiento cada vez más lejos de los mundos concretos. La diversidad, pluralidad e historia de las situaciones son características necesarias para construir pensamientos flexibles y mundos posibles.

Un ejemplo: De acuerdo con esto, en cuanto las acciones de ordenar y clasificar los objetos del mundo según sus diferencias y sus semejanzas, se extiendan como relaciones binarias, al mundo de lo abstracto, dichas acciones pueden ser representadas con los números naturales a través de las relaciones de orden y de equivalencia respectivamente; pues estos números, en los procesos cognitivos para su construcción, las comportan: afirma Vergnaud, que es con base en el operar cognitivamente con estas relaciones binarias, como se conforma el concepto de número, pues, el hecho de que las clases constituidas por las correspondencias pueden ser incluidas por otras clases que las componen, implica el reconocimiento de que una clase puede ser a la vez un todo y parte de otro todo, reconocimiento que exige, no solo la ordenación y clasificación, sino que éstas deben ser simultáneas, lo cual, a su vez, también exige un pensamiento reversible (flexible en direcciones opuestas), ya que no es posible realizar simultáneamente las acciones concretas de ordenar y clasificar, y por lo tanto es en el pensamiento en el que se va indistintamente de la acción de clasificar a la de ordenar al margen del tiempo, es decir, simultáneamente.

Vergnaud plantea que en el concepto de número quedan implicadas, la unión de clases, y su separación, sin que por ello se desaparezca o se transforme la totalidad, y por ello, queda implicada la posibilidad de la adición: es decir que partiendo de dos conjuntos disyuntos cuyos cardinales se conocen, se obtenga para su unión un resultado expresable por un cardinal único. El reconocimiento de que un todo puede ser considerado también parte, y que en ese cambio de contexto, los cardinales implicados no cambian.

Los conceptos

El segundo contenido del campo conceptual lo forman los conceptos, las respuestas cognitivas que se adquieren y se utilizan en las situaciones. En su elaboración Vergnaud retoma y amplía la noción planteada por Piaget de esquema. Un esquema cognitivo está compuesto de: a) anticipaciones, b)reglas de acción, c) invariantes operatorias, d) inferencias.

- "El funcionamiento cognitivo reposa en el repertorio de esquemas disponibles, anteriormente formados" y se activa en función de la situación particular por enfrentar. El sujeto dispone de una conceptualización (que puede ser implícita) que es la que le permite enfrentar una situación desconocida y lo impulsa a realizar exploraciones y tentativas que pueden resultar exitosas o fracasadas. Esto no quiere decir que el sujeto aprende primero la teoría y luego la práctica, la conceptualización implica unión indisoluble entre pensamiento y acción. Pero sí quiere decir que las posibles

nuevas acciones se construyen desplegando acciones actuales sobre lo novedoso.

- Vergnaud pone el ejemplo del salto alto que hace un atleta, que supone un conjunto de conocimientos y destrezas espaciales y mecánicas que contribuyen a asegurar la eficacia de las diferentes fases del movimiento. Las exploraciones que el esquema genera para alcanzar un objetivo se rigen por reglas de acción, que organizan las conductas que se han de seguir.

- Vergnaud da a la noción de invariante un sentido amplio, incluyendo en ella tres tipos: teoremas en acto, conceptos en acto y argumentos. La expresión "invariante operatoria" designa el conocimiento contenido de los esquemas. Desde la perspectiva de la conservación, Piaget propuso una noción de invariante más restringida, iniciando con la conservación del objeto, pasando luego a la de cantidad y posteriormente a distintas magnitudes.

  Un teorema en acto no es del todo un teorema, ni un concepto en acto es del todo un concepto, pero se corresponden en las categorías de conocimiento explícito: proposiciones y funciones proposicionales. Los teoremas en acto -como las proposiciones- pueden ser verdaderos o falsos. Los conceptos en acto -como las funciones proposicionales- no pueden ser verdaderos o falsos, sólo susceptibles de ser más o menos adecuados a la situación enfrentada. "Hay una estrecha interacción en la construcción de teoremas en acto y conceptos en acto."

Esta es la definición pragmática de concepto de Vergnaud: Cada uno de los conceptos matemáticos comporta distintas propiedades, algunas de las cuales pueden ser comprendidas antes que otras, pero el camino de su formación pasa siempre por el de captar, en las diversas situaciones, invariantes utilizables en la acción; dicho de otro modo, cada concepto matemático "nos remite al conjunto de esquemas movilizados por los sujetos en esas situaciones".

- El sujeto en cada situación determinada hace inferencias o deducciones de acuerdo con el relacionamiento de anticipaciones, reglas de acción y conocimientos. Las inferencias que realiza el sujeto en el caso particular son, pues, indispensables para el empleo del esquema, que es siempre universal. "El esquema de conocimiento deber ser puesto en marcha en cada situación particular; no es un estereotipo sino una función temporalizada a argumentos, que permite generar series diferentes de acciones y de empleo de informaciones en función de las variables de situación" (Vergnaud, 1991)

Las representaciones

Por último, el tercer componente de los campos conceptuales lo conforman las representaciones. Son formas de poner para otros y para sí mismo las construcciones mentales (conceptos, esquemas, situaciones, las mismas representaciones). Para este propósito, se usan dispositivos gráficos (palabras escritas, dibujos, fotografías) o fónicos (palabras habladas, ruidos) para disponer los elementos de una situación, sus relaciones y para mediar las acciones

concretas que habrán de recaer sobre éstos o imaginar las acciones posibles que podrían efectuarse. Estos símbolos o referentes, según Vergnaud (1991), cumplen una triple función:

- "De evocación: recuerdan esquemas, tanto como los evocan las situaciones;
- De designación: facilitan de este modo la representación y la comunicación;
- De apoyo al razonamiento y a la planificación de la acción."

En las tareas matemáticas, la simbología tiene una gran importancia por su economía ($X \in N$ es una frase que resume infinita cantidad de frases). Sin embargo, esta economía trae como consecuencia un altísimo grado de abstracción y empaqueta enorme cantidad de trabajo y conocimiento humano. Este hecho entraña un riesgo de confusión. Para evitarlo se puede utilizar representaciones menos generales (por eso menos potentes), que permiten diferenciar la situación referida en la representación.

Aportes didácticos

En la teoría propuesta por Vergnaud evidenciamos tres "principios" que resumiremos así:

- Lo pragmático: El conocimiento es, por definición operativo, todo concepto se conforma a través de las situaciones que vive el sujeto, en la acción de la búsqueda de soluciones a los problemas que se plantea. El primer acto de mediación del docente ha de ser la propuesta de tareas cognitivas, seleccionadas entre las

situaciones que vive el niño, y dirigidas a estimular las operaciones del pensamiento que den respuesta a los problemas. Ese primer acto de mediación deberá ser seguido de otros muchos, en los que se dará siempre un juego dialógico, vivo, nunca automático, entre el maestro y el alumno. (Lo crítico - comunicativo).

- Lo interactivo: Los contenidos matemáticos tienen que ser elaborados a la vez desde tres ángulos: de la realidad de la que surgen (contexto), de los conceptos tal como se estructuran (cognición) y de los símbolos que los representan (sentido e intenciones). Los datos recogidos de la situación, los significados emergentes de la acción y la representación simbólica de esas situaciones y actos se implican y enriquecen entre sí. (Lo complejo).

- Lo evolutivo, pero no mecanicista: el desarrollo conceptual se produce a través de continuidades y de rupturas; de asimilar por afinidad lo nuevo a lo ya conocido y de acomodar los significados construidos a situaciones que los desestabilizan parcial o totalmente. (Lo constructivo).

El mismo Vergnaud ubica su discurso y elaboración en la "interacción entre lo cognitivo y lo didáctico" cuando nos dice:

> "No se trata de la historia de las matemáticas, sino de la historia del aprendizaje de las matemáticas. Esta historia es individual. No obstante, se pueden observar regularidades impresionantes entre un niño y otro, en la manera como abordan y tratan una misma situación, en las concepciones primitivas que

> se forman de los objetos, de sus propiedades y de sus relaciones, y en las etapas por las que pasan. Estas etapas no están totalmente ordenadas, no obedecen a un calendario estricto, las regularidades llevan a distribuciones de procedimientos y no están unívocamente determinadas. Pero el conjunto forma, forma sin embargo, un todo coherente para un campo conceptual dado, donde se pueden efectivamente encontrar las principales dependencias y las principales rupturas, lo que constituye la justificación principal de la teoría de los campos conceptuales". (Vergnaud, 1991)

Vergnaud señala que los docentes desarrollan un saber práctico, demuestran su capacidad de diagnóstico y reconocen la oportunidad de su intervención. Esto habilita una búsqueda didáctica, en la que se valora el quehacer del aula.

3.3 NATURALEZA DE LA MULTIPLICACIÓN

Nos dedicaremos a examinar la naturaleza de la multiplicación, desde una perspectiva matemática.

La multiplicación entendida como una operación aritmética entre números naturales, tiene como punto de partida dos números y punto de llegada otro número (distinto o no) de los anteriores. En el camino se puede registrar una transformación de los primeros en el último y tiene un carácter binario ya que opera sobre dos números.

$$N \times N \longrightarrow N$$

$$(a, b) \longrightarrow c$$

Sin embargo, se puede interpretar la multiplicación como la acción de un número sobre todos los otros, como sucede con "la tabla el dos". De manera general, en este contexto, aparece dispuesta así:

$$N \xrightarrow{\times b} N$$

$$a \longrightarrow c$$

Esta interpretación unitaria de la multiplicación es, naturalmente, más limitada, menos general. Sólo define los resultados de multiplicar cualquier número natural a por otro b, es decir, sólo define los múltiplos de b.

Del primer modo es más general y, por tanto, preferible en el terreno matemático. Pero, del segundo modo, sin embargo, se ajusta mucho más a la concepción inicial que se tiene de la multiplicación: Existe una cantidad (multiplicando) que es transformada por otra cantidad (multiplicador) que señala el número de veces que se repite la primera.

La multiplicación es una operación binaria desde el punto de vista matemático, pero comienza siendo unitaria en su aprendizaje. Ello refleja el hecho de que los papeles de ambas cantidades están diferenciados en un principio para hacerse intercambiables después.

En su interpretación unitaria, la multiplicación puede definirse como una suma reiterada generalizando la definición de suma de la siguiente manera:

- Escoger b conjuntos disyuntos dos a dos, cada uno con cardinal a.
- Realizar la unión de esos b conjuntos, obteniendo el conjunto C
- Hallar el cardinal c del nuevo conjunto C que es la multiplicación de a veces b.

Esta interpretación responde a una concepción unitaria de la operación ya que los papeles de a y b son distintos. Por otro lado, pone de manifiesto que no solo estos papeles son distintos, sino que son los cardinales de conjuntos de distinto rango en abstracción: el número a es el cardinal de un conjunto de elementos, mientras que b es el cardinal de una colección de conjuntos. A partir de esta

definición se puede comprender que el multiplicando y el multiplicador tienen papeles diferentes y naturalezas también distintas. Por ello, la interpretación de la multiplicación como una suma reiterada excluye la identificación de una con otra. La multiplicación no es una suma reiterada incluso interpretándola como tal. No es un caso particular de la suma. Es otra operación que puede definirse, tal como aquí se ha hecho, a partir de la suma. Pero no se reduce a ella.

3.3.2. Multiplicación como producto cartesiano

Entender la multiplicación como la realización de un producto cartesiano supone muchas cosas diferentes respecto a la definición anterior. Dentro de la misma, los conjuntos A y B tienen el mismo nivel de abstracción: se refieren a conjuntos de elementos concretos, sean los que sean. En cambio, el resultado c es el cardinal de un conjunto cuyos elementos son combinaciones de elementos de A y B. Se haría del siguiente modo:

- Escoger un conjunto A cuyo cardinal es a
- Escoger un conjunto B cuyo cardinal es b
- Formar el producto cartesiano A x B
- El cardinal de A x B es el resultado c y se entendería como el cardinal de un conjunto cuyos elementos son combinaciones de elementos de A y de B

Las diferencias entre ambas concepciones no acaban aquí, puesto que si la primera se apoyaba en una concepción unitaria de la multiplicación, la segunda lo hace sobre una concepción binaria de la misma. Ello implica una conmutatividad entre los elementos de A y B que no existía en el caso de la suma reiterada. Así la pareja de Pedro y Margarita es la misma pareja de Margarita y Pedro. Esto no es rigurosamente cierto pero señala ya el aspecto binario de la operación que se ha demostrado de comprensión posterior al aspecto unitario.

¿Qué es entonces la multiplicación? Es, ante todo, una operación aritmética tanto de naturaleza unitaria, como binaria, que puede interpretarse como una suma reiterada (sin ser lo mismo), o como un producto cartesiano.

3.4 NATURALEZA DE LA DIVISIÓN

En la división se dispone de dos números iniciales, que suelen denominar dividendo y divisor y, a partir de ellos, se trata de obtener otro con el nombre de cociente:

$$\text{(Dividendo, divisor)} \longrightarrow \text{cociente}$$
$$(D, d) \longrightarrow C$$

Ello ya indica que la división sólo es una operación dentro de los números racionales. Es decir, que es una aplicación definida del siguiente modo:

$$Q \times Q \longrightarrow Q$$
$$(D, d) \longrightarrow C$$
$$\text{tal que } D = d \times C$$

Se puede afirmar que es una aplicación si apelamos a la llamada <división exacta>:

$$N \times N \longrightarrow N \times N$$
$$(D, d) \longrightarrow (C, r)$$
$$\text{tal que } D = d \times C + r,$$
$$\text{debiéndose cumplir que } 0 \leq r < C$$

Una situación modelada con esta interpretación de división podría ser:

¿Cuál es la menor cantidad de salones que se debe disponer si el cupo máximo de personas

en cada salón es de 30 y se requiere sitio para 145 personas?

Lo cierto es que existe una relación clara entre la multiplicación y la división. La mayoría de los autores prefieren hablar de <cierta forma de inversión> apelando mas a criterios psicológicos y de aprendizaje que a criterios matemáticos:

Si, la multiplicación se interpreta como una acción efectuada sobre dos números para obtener otro, la división expresa el hecho de que se conoce parte de la acción y el resultado y se desconoce el resto de dicha acción. Es decir, en una multiplicación ha de hallarse uno de los factores conociendo el resultado final:

$$a \times ? = c$$

lo cual se escribe como $c : a = ?$

En consecuencia, suponer que la división <es> una resta reiterada puede parecer correcto matemáticamente. Es posible tal definición si los siguientes pasos se aplican:

- Se considera un conjunto A cuyo cardinal es a
- se considera una colección de subconjuntos de A, disyuntos dos a dos, cada uno de los cuales con cardinal b.
- Se resta del conjunto A sucesivamente cada uno de esos subconjuntos
- El número de veces que esta resta sea posible es C (El cociente)
- Se considera el conjunto R resultante de la sucesión de restas realizadas
- El cardinal de R es r (el residuo de la división)

3.5 IMPORTANCIA DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

En otra ocasión habíamos planteado que entendemos problema **"como una situación que debe ser modelada, de la cual se deriva una pregunta, para cuya respuesta la estrategia de resolución no es inmediata ni simple. Por lo tanto genera conocimiento, recordando que no existe conocimiento sin preguntas"**; entonces, no se le puede considerar como la última etapa del proceso de aprendizaje.

Visto como el proceso mediante el cual un sujeto o grupo de sujetos resuelve(n) un problema, la resolución de problemas es una actividad que los seres humanos realizamos desde el nacimiento mismo, manifestándose desde los procesos de adaptación biológica, cognoscitiva, afectiva. Es uno de los procesos de constitución del sujeto como ser humano pues participa en el desarrollo de sus dimensiones éticas, afectivas, lúdicas, estéticas, al mantenerlo en relación e interacción con otros seres humanos y con el medio social y cultural.

No es gratuito que en la investigación educativa y psicológica, la importancia curricular de los problemas se haya puesto de relieve; aunque en la educación, tradicionalmente se les relegue en relación al aprendizaje de los conceptos -por parte de profesores y desde el currículo- a cubrir dos objetivos: mecanizarlos y afianzarlos en medio de una práctica sobre situaciones para las cuales el individuo tie-

ne ya competencias adquiridas, y, servir como indicadores para evaluar si es cierto o no que se les ha aprendido.

En palabras de Maza (1992, p. 25), la sicología cognitiva consideraba que en un sentido amplio, en el "problema

- Se partía de unos datos originales.
- Se planteaba una meta a alcanzar.
- Esta meta respondía a una necesidad del resolutor.
- Se buscaba una estrategia que permitía pasar de los datos originales a la meta buscada.
- Se ponía en práctica dicha estrategia", dejando de lado, que el proceso de resolución muchas veces exige acompañamiento e intervención puesto que esta actividad es de gran complejidad cognitiva. Siendo este proceso extremadamente sensible a los cambios en las operaciones, al tipo y tamaño de los números, al formato como se presenta las situaciones, e incluso a los nombres usados para referir los objetos que aparecen en las situaciones, etc.

El profesor Carlos Maza (1991) en su trabajo desarrolla una conceptualización sobre la resolución de problemas multiplicativos, aportando una forma de clasificarlos, mostrando formas de solucionarlos, así como las principales dificultades de los sujetos que resuelven estos problemas:

3.5.1. Razón y combinación

Este autor identifica dos clases de problemas de multiplicación, correspondientes con las interpretaciones que caracterizan a la multiplicación. Por un lado, los problemas

que se resuelven por suma reiterada y los que son resueltos por el producto cartesiano. Consideramos el siguiente ejemplo:

> **Vamos a comprar 5 tamales. Cada uno cuesta 2000 pesos. ¿Cuánto tendremos que pagar en total?**

Este es un problema clásico que se resuelve sin más que sumar 2000 pesos cinco veces: $2000 + $2000 + $2000 + $2000 + $2000= 5 x $2000 = $10000 pesos.
Esta estrategia no es tan adecuada, sin embargo, para tratar un problema como el siguiente:

> **Carlos tiene un restaurante en el que ofrece 5 clases de postre y 4 tipos de almuerzo. ¿Cuántos menús ofrece Carlos en su restaurante?**

Se puede aplicar la suma reiterada (sumar uno a uno los veinte menús, o sumar los 4 tipos de almuerzo por cada postre (4 menús), tantas veces como número de postres hay (5 tipos distintos de menú). Pero tal vez es más adecuado considerar la multiplicación como un producto cartesiano de manera que el resultado se obtenga multiplicando directamente (sin hacer suma reiterada) veinte tipos distintos de menú.

Dado que los tipos de acción involucrados en las dos situaciones son distintos, los dos problemas son diferentes de resolver; aunque ambos problemas se resuelven empleando la misma operación: la multiplicación.

Estos problemas también presentan diferentes dificultades: se ha encontrado que el segundo resulta más difícil de resolver que el primero.

En opinión de Maza (1991), las dificultades de resolución de esta clase de problemas, están asociadas con dos razones fundamentales:

- "El problema de razón se puede resolver, inicialmente, por una suma reiterada. Sin embargo, el de combinación requiere un conocimiento maduro de la operación de multiplicar. Todas las investigaciones indican que el distinto papel que caracteriza, en la suma reiterada, al multiplicando y al multiplicador, se va construyendo de un modo paulatino a partir de ejercicios de suma repetida de una cantidad consigo misma.

- Complementariamente al argumento anterior, es necesario notar el carácter de operación a que responde cada problema de los tratados. En los de razón se dispone de una cantidad inicial que va cambiando a medida que se repite sucesivamente un número de veces. En este caso, la multiplicación se concibe como una operación unitaria."

Desde nuestro punto de vista, la mayor dificultad del segundo problema, radica en dos aspectos:

- La necesidad de construir una nueva unidad, «tipo de menú», a partir de las unidades «tipo de almuerzo» y «tipo de postre».

- La necesidad de aceptar que cada una de las unidades «tipo de almuerzo», debe relacionarse con cada una de las unidades «tipo de postre». Es decir, el pensamiento actúa más allá de lo concreto, extendiéndose a lo posible.

Encontramos, según lo dicho aquí, distintos tipos de interpretación de la multiplicación: la que resuelve el primer problema, enmarcada dentro de la concepción de suma reiterada, y la que resuelve el segundo, inmersa en una concepción de variación simultánea de ambos factores, lo que hace indistinguible su papel para entender la estructura de la situación abordada. Todo lo discutido muestra que la multiplicación no se concibe como una operación con estructura única con la que se puede resolver una serie de problemas.

Así que para conseguir una unificación conceptual de la multiplicación, se debe tener conexiones entre ambos tipos de problemas, filiaciones en el sentido de Vergnaud, que permitan a la persona que los resuelve descubrir que las distintas formas de resolverlo son, en realidad, una sola. Un instrumento esencial para ello serán las representaciones gráficas en forma de matriz, lo que establece relaciones directas con los aprendizajes y discusiones desde el álgebra lineal. Según Carlos Maza (1991), "la estrategia más usual para intentar resolver el problema multiplicativo requiere tres pasos:

1) Considerar una cantidad hipotética para el primer conjunto.

2) Construir la inclusión jerarquizada de los tres conjuntos en juego.

3) Resolver multiplicativamente (o por suma reiterada a partir del primer paso) la relación entre los dos cuantificadores dados".

De acuerdo con las investigaciones realizadas por investigadores en varias partes del mundo, se presentan ciertos niveles de dificultad en la resolución de problemas multiplicativos y en la secuencia de aprendizaje así:

NIVELES DE DIFICULTAD

1. PROBLEMAS DE COMPARACIÓN………………… Multiplicativos
   Agrupamiento - comparación
   Partición - comparación
2. PROBLEMAS DE RAZÓN…………………………… Multiplicativos
   Agrupamiento - razón
   Partición - razón
   División
3. PROBLEMAS DE COMBINACIÓN………………… Multiplicación
   División
4. PROBLEMAS DE CONVERSIÓN…………………… Multiplicación
   División

Relación de estrategias utilizadas y los tipos de problemas a que se aplican.

ESTRATEGIAS DE MULTIPLICACIÓN

1. SUMA REITERADA…………………………………… Razón
2. SUMA REITERADA CON INCLUSION JERARQUIZADA…………………………………… Conversión
3. ESTRATEGIA MULTIPLICATIVA…………………… Combinación
4. ESTRATEGIA MULTIPLICATIVA CON INCLUSIÓN JERARQUIZADA……………………… Conversión

ESTRATEGIAS DE DIVISIÓN

1. ADICIÓN Y RESTA REITERADAS………………… Agrupamiento - razón
   Agrupamiento - comparación
2. ENSAYO Y ERROR DE REPARTO………………… Partición - razón
   Partición -comparación
3. REPARTO CON INCLUSIÓN JERARQUIZADA … Conversión
4. INVERSIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN…………… Combinación
5. INVERSIÓN CON INCLUSIÓN JERARQUIZADA… Conversión

Fuente: Carlos Maza (1991)

3.6 ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Se consideran problemas con estructura multiplicativa aquellos que se pueden resolver a través de una multiplicación o una división.

3.6.1 Clasificación según Vergnaud:

Clasifica en dos grandes categorías los problemas simples de multiplicación:

1. La categoría de isomorfismo de medidas.
2. La categoría de producto de medidas.

• Isomorfismo de medidas

Esta estructura se refiere a los problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre las dos magnitudes implicadas. Para representar esta estructura utiliza tablas de correspondencia:

M_1	M_2
x	f(x)
x´	f(x´)

La función **f:** $\mathbf{M_1 \longrightarrow M_2}$ es una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M_1 y M_2. Dentro de esta estructura (isomorfismo de medidas), identifica cuatro subclases de problemas, una subclase de multiplicación,

dos subclases de división y una cuarta que llama problemas generales de regla de tres.

La subclase de multiplicación corresponde en el esquema anterior al caso particular de ser x=1; conocidos f(x) y x'; desconocido f(x').

La subclase de división en este primer tipo de problemas considera los que en la estructura general presentan la característica de ser x=1; la incógnita f(1) y son conocidos x' y f(x').

La subclase de división en el segundo grupo considera los que de acuerdo al esquema general deben hallar x' conociendo f(x') y f(1) siendo x=1

Los problemas de regla de tres se pueden esquematizar por:

M_1	M_2
a	b
c	x

Intervienen tres datos a, b, c; lo que indica que no son problemas simples de estructura multiplicativa.

• Producto de medidas

En esta estructura se consideran tres magnitudes M_1, M_2, M_3 una de ellas (M_3) es el producto cartesiano de las otras dos $M_1 * M_2 = M_3$. Dentro de la estructura producto de medidas se pueden distinguir dos tipos de problemas:

- **Multiplicación** (encontrar la medida producto, conociendo las medidas que la componen).
- **División** (encontrar una de las medidas que se componen, conociendo la otra y la medida producto).

En cada una de estas clases de problemas se pueden subdividir de acuerdo al tipo de magnitud implicado: discreta, continua; el tipo de números enteros decimales, números grandes, números inferiores a 1 y los conceptos implicados.

3.6.2. Enfoque de estructura de cantidades

Schwartz (1988) considera dos tipos de cantidades, intensivas **(I)** y extensivas **(E)**; la cantidad extensiva viene expresada como unidad simple (Ej. 8 metros), mientras la cantidad intensiva (I) tiene una unidad compuesta (Ej. 50 metros por hora). Con base en esta distinción clasifica los problemas multiplicativos así:

- Problemas asociados a la terna (I, E, E'): estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama isomorfismo de medidas y se dan tres tipos: **I*E=E', E'/E=I y E'/I=E.**

- Problemas asociados a la terna (E, E', E"): estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama producto de medidas y se pueden dar: **E*E'=E" y las divisiones E"/E=E' o E"/E'=E**

- Problemas asociados a la terna (I, I', I"): corresponde al problema **I*I'=I"** y las divisiones **I"/I'=I y I"/I=I'.**

• Clases de cantidades en problemas de razón y combinación (Maza, 1991)

Se dijo anteriormente los problemas multiplicativos son de dos tipos de razón y combinación, si bien los primeros mucho más que los segundos. Igualmente en una forma de profundización del análisis coexisten dos clases mas: los problemas de comparación y los de conversión.

Los primeros tienen una similitud estructural muy marcada con los de razón, mientras que los segundos, muestran marcadas relaciones tanto con los de razón como con los de combinación.

Intrínsecamente en esta clasificación en cuatro clases, distinguimos un criterio de diferenciación en la estructura de sus cantidades. Por ello conviene, antes de pasar a examinar con detalle los dos últimos tipos de problemas, revelar este criterio, observando su aplicación a los problemas multiplicativos.

RAZÓN	E x I = E’
COMBINACIÓN	E x E’ = E”

Se puede identificar cuatro tipos de problemas multiplicativos. Pues aparece otra diferenciación, debido a que la cantidad intensiva en los problemas que el autor llama de comparación, puede adoptar una forma peculiar para la cual es cuestionable el empleo del termino razón; y porque se identifica los problemas que el autor llama de conversión con el producto de cantidades I x I’ = I”.

Se suele asociar el planteamiento de estos problemas a las cuestiones de la física de conversión de medidas, propias de un nivel de enseñanza diferente a la de los grados iniciales, sin embargo un tipo de estos problemas es:

> En la escuela del barrio hay 35 niños en cada salón y tres salones por grado. ¿Cuántos niños hay por grado?
>
> Hay 10 dulces en un estuche pequeño. Uno grande tiene 5 veces más. ¿Cuántos dulces hay en el paquete grande?

Por otro lado se puede observar en el siguiente problema, que se identificaría con un problema de comparación, como el análisis de su estructura de cantidades es E x I = E´ y que Maza (1991), analiza así:

> **"Un coche de juguete cuesta 50 pesos. Otro, más grande, cuesta 3 veces más. ¿Cuánto me costaría este último?**
>
> **Al mencionar <tres veces más > ¿Qué estamos empleando? ¿Una cantidad intensiva o extensiva? Extensiva, desde luego, no. El número 3 denota las veces que una cantidad (pesos del coche grande) es superior a otra (pesos del coche pequeño). En este sentido, uno puede inclinarse por afirmar que es una cantidad intensiva. La diferencia con la razón es que, en ésta, la segunda cantidad es la unidad. Sin embargo, aquí nos estamos refiriendo a pesos del coche grande respecto a las del coche pequeño. Y éstas últimas no son la unidad.**

A este término comparativo se llama <cuantificador> y a los problemas que genera, en consecuencia, de comparación. La estructura es idéntica a los problemas de razón. E x I = E'."

PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN

RAZÓN	$E \times I = E'$
COMPARACIÓN	$E \times I = E'$
COMBINACIÓN	$E \times E' = E''$
CONVERSIÓN	$I \times I' = I''$

Dado el tipo de refinamiento en el análisis estructural de los problemas multiplicativos, en cuanto a la diferenciación entre los problemas de razón y de comparación, máximo cuando a la luz del análisis de las cantidades que intervienen ambos problemas tienen la estructura $E \times I = E'$, se podrían hacer las distinciones así:

En los problemas de razón: se repite la cantidad intensiva, según el número de la cantidad extensiva

En los problemas de comparación: se repite la cantidad extensiva, según el número de la cantidad intensiva.

Por otro lado los diferentes roles de multiplicando y multiplicador conducen a formular distintos problemas de división, dependiendo de cual de estos datos sea la incógnita.

Por ejemplo el siguiente problema:

Un balón vale 10000 pesos. Otro balón de los de mayor tamaño cuesta 40000 pesos. ¿Cuántos balones pequeños valen igual que uno grande?

Una muñeca grande vale 15000 pesos y cuesta tres veces más que un muñeca pequeña. ¿Cuánto vale la muñeca pequeña?

PROBLEMAS DE DIVISIÓN

AGRUPAMIENTO - RAZÓN…………	? x I = E
PARTICIÓN -RAZÓN………..……	E x ? = E’
AGRUPAMIENTO - COMPARACIÓN..	E x ? = E’
PARTICIÓN COMPARACIÓN………....	? x I = E
COMBINACIÓN…………......…………	? x E = E’

3.6.3 El enfoque textual

Para Nesher(1988), citado por Castro et al. (1995), los análisis de Vergnaud y de Schwartz se apoyan en un conceptos físicos del análisis dimensional, la diferencia está en que Schwartz considera en la estructura multiplicativa la relación entre los elementos y Vergnaud lo concibe como una relación cuaternaria. Nesher se sitúa en un análisis semántico al igual que lo hizo con los problemas aditivos. Identifica tres grandes categorías:

- Reglas de transformación. Considera dos tipos de problemas de multiplicación y de división, los problemas de división los subdivide en dos: división cuotitiva y partitiva (de acuerdo a la categorización de Vergnaud

corresponde a isomofismos de medida y según Schwartz a los de tipo **I*E = E'.**

- Comparación multiplicativa. Hay implicadas tres cantidades, la cantidad que sirve de referente en la comparación, la que es comparada y el factor de comparación o escalar. De acuerdo a Vergnaud corresponden a la categoría de isomorfismo de medidas y según Schwartz a la terna I * E' = E''.

- Multiplicación cartesiana. Están incluidos en la categoría producto de medidas de Vergnaud y en los del tipo E * E' = E'' de Schwartz.

3.6.4. Clasificación según Greer

Las categorías para los problemas multiplicativos establecidas por Greer son:

- Grupos iguales. A esta clase corresponden los problemas multiplicativos en los cuales aparecen dos expresiones, una relativa a cada uno (referida a cada grupo) y la otra expresión que refiere el número de grupos. Esta clase da lugar a dos tipos de problemas de división: la partitiva (en la que se busca el tamaño del grupo) y la cuotitiva (en la que se busca el número de grupos).

- Comparación multiplicativa. Corresponden a aquellos problemas en los que está presente la expresión: tantas veces como", y en ella se involucran un factor multiplicativo y un multiplicador es decir, un número que indica cuántas veces se repite el factor multiplicativo.

- Producto cartesiano. Involucra aquí todos los problemas en los que la combinatoria es el modelo de interpretación del problema. Debido a que en esta clase los números que aparecen en el problema son elementos de una pareja ordenada, se puede encontrar sólo un problema de división.

- Área rectángulo. Se encuentran en esta categoría los problemas relacionados con hallar áreas, ó hallar las longitudes de los lados de un rectángulo.

  En este punto de la presentación, es posible vislumbrar la complejidad de eso que comúnmente llamamos la multiplicación, y eso que hasta ahora no hemos traído a colación su algoritmo clásico. Pues bien, la noticia es que aquí no se le discutirá. Sin embargo, expresaremos comentarios acerca de la relación entre los algoritmos clásicos y el sistema de valor posicional, con la intención de reflexionar acerca de la complejidad de estas herramientas de representación y cálculo.

3.7 ANOTACIONES ACERCA DE ALGORITMOS ARITMÉTICOS ESCOLARES CLÁSICOS

La expresión **algoritmo matemático** es un término usado para referir un procedimiento matemático, finito a ejecutar paso a paso, para conseguir un propósito determinado. Tal es el caso de los algoritmos clásicos enseñados para hacer calculos de suma, resta, multiplicación y división.

Los algoritmos clásicos de las cuatro operaciones involucran el manejo de la estructura del sistema de numeración decimal de la cual forman parte los conceptos de número, valor posicional y teoría de agrupamiento. Tal como lo afirma Vergnaud (1991, pág. 135) "el número es un concepto para el cual existen varios sistemas posibles de escritura; la numeración posicional en base diez es uno de ellos", los conceptos: número, posición y agrupamiento dan sentido a los algoritmos de manera diferenciada; mientras el número es un concepto cuya estructura puede diferenciarse de las diversas maneras en que se puede escribir los números específicos, "el sistema de numeración es un soporte de la conceptualización" (Vergnaud, 1991, pág. 135) ya que la escritura de los números aparece vinculada al número mismo; sin embargo los métodos de enseñanza utilizados hasta ahora y basados en lo que Plunkett denomina el enfoque "analítico" en lo computacional permite el aprendizaje de una serie de reglas:

> **"que aunque puedan ser recordadas, son en gran parte aprendidas sin justificación y no están relacionadas con otros conocimientos aritméticos. Distan mucho de contribuir a la comprensión de la noción de número; más bien suscitan y alimentan la creencia de que las matemáticas son esencialmente arbitrarias**" (citado por Dickson et al. 1991 pág. 271*)*.

Este enfoque analítico hace relación no sólo al concepto de número sino que también puede verse en relación al valor posicional y al agrupamiento, en la medida, en que estos conceptos son aprendidos como esquemas de colocación (poner en casillas) o como simples valores de equivalencias entre unidades, decenas, centenas y demás unidades de orden.

La idea de número involucrada en el sistema decimal de numeración se basa en el reconocimiento del valor relativo de cada cifra de acuerdo al lugar que ocupa en el número tomado como globalidad, es decir, comprender que un dígito cambia su valor en la medida en que asume diferentes posiciones dentro del número global, por ejemplo el número 444 está compuesto de 3 dígitos iguales (el 4) pero que cuando se involucran en el número cuatrocientos cuarenta y cuatro toman valores diferentes, que corresponden a los dígitos que acompañan a las potencias de diez ($4x\ 10^2 + 4x\ 10^1 + 4x\ 10^0$).

Así mismo la idea de agrupamiento se refiere a los grupos de las potencias de diez que se han construido para conformar lo que denominamos unidades 10^0, decenas 10^1, centenas 10^2, etc.

El sistema de numeración decimal incluye el manejo del aspecto posicional y del agrupamiento en la medida en que en la lectura de un número se encuentran a la vez el valor de la posición, entender el número como una síntesis de agrupamientos de 10 y las cifras como portadoras de un valor de acuerdo a la posición que ocupan es diferente de entender el número solo desde la secuencia de los números conformada por 1 más. Las seriaciones que se realizan cuando se "cuenta" no significan que se entienda el sistema de numeración y el valor de los agrupamientos que se han hecho para poder escribirlos.

Así mismo, el sistema de numeración incluye aspectos multiplicativos en cuanto todo número se descompone en un polinomio de potencias de la base 10. Ej: en el número 324 su descomposición polinomial será: $3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$. Pero así como en la escritura del número hay implícitos varios conceptos, también en el desarrollo de los algoritmos los hay en la escritura de las cantidades y las propiedades de las operaciones.

El sistema posicional emplea el numeral 0 para describir la carencia de unidades de un determinado orden y no en el sentido de que el cero es sinónimo de nada " por sobreentenderse que si es nada, nada hay que tener en cuenta". Citado por Dickson, et al. (1991, pág. 277) Oesterle señala que:

> **"La importancia del cero para denotar un lugar en la notación posicional y como parte vital de nuestro sistema de numeración, aparece, como tantos autores han señalado, cuando comenzamos con la adición y multiplicación de los números de dos dígitos. Hasta ese mo-**

mento no parece existir auténtica razón para introducir tablas del cero en ninguna de las operaciones fundamentales"

Entonces para entender los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división es necesario tener los conceptos involucrados en el sistema de numeración de tal manera que sean ellos los que permitan dotar de significado a las operaciones realizadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castro et al. (1995). ***Estructutas aritméticas elelmentales y su modelización***. México: Iberoamérica.

Dickson, L; Brown, M; Gibson, O. (1991) ***El aprendizaje de las matemáticas***. Madrid :Labor.

Maza, C. (1991). ***Multiplicar y dividir***. Madrid :Visor.
Reportaje a Vergnaud (1994). En: Novedades Educativas Buenos Aires p. 25-34.

Maza, C. (1992). ***La enseñanza de la multiplicación y la división***. Madrid :Síntesis.

Vergnaud, G. (1990). ***La théorie des Champs Conceptuales.*** En: Recherches en Didactique de Mathematiques. Vol. 10 (2-3). p. 133 - 170.

Vergnaud, G. (1991). ***El niño las matemáticas y la realidad.*** México :Trillas.

LOS NIÑOS
Y LAS FRACCIONES

4

CAPÍTULO **cuatro**

Pedro Javier Rojas G.
Luis Oriol Mora V.
Cecilia Barón P.

Profesores Universidad Distrital Francisco José de Caldas

La ubicación de las fracciones en la educación básica es un tema controvertido, pues mientras algunos consideran que dado su escaso uso en la vida cotidiana se debería reducir su enseñanza en la escuela, otros destacan que precisamente la incomprensión acerca de las fracciones es la causa del escaso uso que de ellas se hace. A favor de su estudio también se argumenta la importancia que tienen para la comprensión de la estructura de los números racionales y el ser parte de la herencia cultural de la humanidad. Sin embargo, si se considera importante enseñar fracciones, nuevamente surgen interrogantes relativos a:

- ¿Qué aspectos de la fracción es posible enseñar, con comprensión por parte del niño, en los diferentes niveles de escolaridad?.

- ¿Cómo evitar los errores frecuentes, particularmente en cuanto al cálculo y a relacionar los símbolos numéricos con representaciones en áreas, en conjuntos discretos y en la recta numérica?.

- ¿Existe otras propuestas de enseñanza con un enfoque diferente al que se refleja en los documentos y textos del Ministerio de Educación Nacional (MEN)?.

En este capítulo, se pretende ofrecer algunos elementos para posibilitar al *profesor de matemáticas*, lograr comprensión sobre algunas dificultades asociadas al concepto de fracción, así como ideas relacionadas con propuestas que orienten el diseño de actividades en el aula en relación con tal concepto.

4.1 LAS FRACCIONES Y LO COTIDIANO

En el ámbito escolar, cuando el profesor de matemáticas hace alusión a las fracciones, suele no tener en cuenta que el contexto de referencia al que acuden los niños para significar el discurso del profesor, se encuentra, como es natural, en su cotidianidad, que en general puede no corresponder con los contextos asociables con significados matemáticos. Por ejemplo:

Octavos y cuartos de final de un campeonato; cuartos, quintos y sextos puestos en una clasificación; cuartos de una vivienda, litro y medio de gaseosa.

Dado que los niños ya han utilizado con otro significado las palabras que denominan las fracciones, podrían mantenerlo si no hay unas acciones encaminadas a reconocer la nueva significación.

Los profesores de matemática reconocen que en el estudio de las fracciones los niños y jóvenes encuentran grandes dificultades de aprendizaje; muchos niños de los primeros cursos, que pueden resolver correctamente problemas sencillos con fracciones mediante la argumentación verbal o el uso de modelos concretos, se muestran en incapacidad de resolverlos cuando se les exige usar una representación simbólica.

Juan cuenta a sus amigos que sólo le queda la cuarta parte del dinero que le dieron para la semana, pues el lunes se

> *había gastado la mitad del dinero y el martes la mitad de lo que le quedaba. Sin embargo, cuando su maestra le pregunta ¿Cuánto da 1/2 +1/4?, él contesta: No sé profe, no me acuerdo cómo se suman fracciones heterogéneas.*

Algunos jóvenes de diferentes cursos de secundaria han memorizado reglas para los algoritmos y aunque desde la matemática formal, generalmente es correcto el uso que hacen de ellos cuando se desempeñan dentro de la representación simbólica, muestran incapacidad para resolver situaciones en las cuales deben relacionar las diferentes representaciones de las fracciones.

Un número significativo de estudiantes de los últimos grados de la educación básica tienen interpretaciones de la fracción que les hacen considerar a 2/5 como el valor de la suma de 1/2 con 1/3; la reiterada aparición de estos errores, a pesar de empezar a tematizar las fracciones desde el grado tercero, hace cuestionar el proceso de enseñanza, pues el énfasis en los algoritmos, como el de la suma durante varios años, no ha posibilitado el aprendizaje en los estudiantes.

4.2 CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR

Al considerar la enseñanza de las fracciones, es necesario analizar el tipo de conocimiento del cual hace uso el profesor de matemática para comprender y abordar los problemas de aprendizaje de sus estudiantes. Tal conocimiento está estrechamente vinculado con su formación inicial y en ejercicio, así como con las fuentes que consulta para el diseño del trabajo de aula.

Si bien el profesor reconoce en el trabajo de los niños dificultad para abordar las fracciones, en tanto encuentra manifestaciones que dan cuenta de dicha dificultad, particularmente en las representaciones numéricas que éstos hacen de las fracciones (dicen, por ejemplo, «tres medios» y escriben 2/3) y en la aplicación de los algoritmos (por ejemplo, 1/2+1/3=2/5), suele justificarla en el desinterés de sus estudiantes, o en las «malas bases» que éstos traen.

Lo anterior refleja una mirada simple ante un problema específico de la profesión «profesor de matemáticas», y pone de manifiesto una carencia de elementos para abordar las dificultades de aprendizaje e indagar, con cierta sistematicidad, acerca de sus causas. Así, debe reconocerse un problema en la formación del docente: *no le posibilita complejizar su mirada sobre lo que acontece en el aula, en relación con temáticas específicas de la matemática escolar*, debido a que el aprendizaje de las nociones matemáticas no ha sido objeto de estudio, pues en las anteriores décadas (e

incluso actualmente), en Colombia, se aceptaba que para enseñar matemáticas bastaba con que el profesor supiera matemáticas (refiriéndose a ésta como el estudio de axiomas, teoremas y ejercicios).

En la actualidad se comienza a enfatizar la necesidad del docente de ***aprender a enseñar matemáticas***, tendencia que privilegia el *conocimiento del contenido pedagógico* del profesor[1] , que implica ligar conocimiento de contenido matemático con conocimiento de pedagogía y se traduce en la capacidad del profesor de buscar formas de representar el contenido para hacerlo entendible a sus estudiantes y proponer tareas pertinentes en las que los procesos que soportan esos contenidos se evidencien. Tal conocimiento se genera de la integración de tres tipos de conocimiento, a saber: conocimiento matemático, conocimiento sobre el aprendizaje de las nociones matemáticas y conocimiento sobre el proceso instructivo.

En los *conocimientos de matemáticas* se incluyen los conceptos matemáticos, la actividad matemática y el currículum de las matemáticas; los *conocimientos sobre el aprendizaje de las nociones matemáticas* tienen que ver con ideas y concepciones previas de los estudiantes de diferentes edades, y con propuestas específicas para guiar el aprendizaje de cada concepto; los *conocimientos sobre el proceso instructivo* comprende planificación de la enseñanza, representaciones instruccionales, recursos didácticos , rutinas instruccionales, características de las interacciones didácticas, y tareas académicas.

[1] LLINARES, S. El profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y el desarrollo profesional. En : SANTALÓ, L. La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia. Madrid: Rialp, 1994. p. 315.

En el aprendizaje de las nociones matemáticas, y particularmente con respecto a las fracciones, existe un saber producto de investigaciones realizadas en las últimas décadas que aunque está publicado en diferentes textos sobre Educación Matemática y orienta algunas propuestas de aula en otros paises (por ejemplo, en E.U y España) aún no ha sido divulgado y estudiado entre los profesores de matemática de este país. En la sección 4.4 se presenta, de manera general, algunos de los resultados de investigaciones en este campo, que se constituyen en referentes importantes para el trabajo en el aula y, por tanto, en parte del conocimiento profesional del profesor.

4.3 LAS FRACCIONES Y LOS TEXTOS ESCOLARES

En los textos de matemática para la educación básica, cuyo uso es bastante popularizado en nuestro país, desde los primeros acercamientos al concepto de fracción, se recurre a los símbolos numéricos y al uso de algoritmos para operar. Conviene contrastar esta característica de los textos, con resultados de investigaciones que muestran unas etapas secuenciales que se requiere alcanzar para comprender algunas de las interpretaciones del concepto de fracción y con propuestas donde se explicita la necesidad de trabajar diferentes representaciones previo al uso de los símbolos.

El trabajo en los textos usuales, durante los últimos años, se apoya en la propuesta curricular del MEN, que toma como referencia un estudio de Vasco (1994): *El archipiélago fraccionario*, en el cual reconoce las cinco interpretaciones de la fracción propuestas por Kieren (1976): partidores, medidores, razones, proporciones y operadores, pero propone introducir los fraccionarios a partir de la «isla principal» de los operadores activos, pues argumenta que a ella se puede llegar desde cualquier sistema concreto, y que a partir de ésta puede echarse los puentes a las demás islas. En este sentido difiere de las ideas de Kieren, quien plantea que la interpretación básica [isla según Vasco] es la de los partidores (relación parte-todo). Más aún, Vasco plantea que la «isla» de los partidores es la más peligrosa por sus «arenas movedizas» (en tanto confusión entre operaciones físicas sobre objetos y los operadores conceptuales sobre magnitudes), pues dice que Kieren no

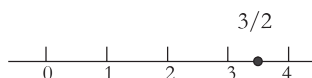
distingue entre los sistemas simbólicos (las fracciones como figuritas) y los sistemas conceptuales (los fraccionarios), lo cual puede deberse según él, a que en inglés hay una sola palabra: «fractions» , que se usa para las fracciones y los fraccionarios.

Sin embargo, en los textos se ha interpretado la idea del MEN como la necesidad de trabajar desde lo numérico y en el uso de algoritmos, a lo cual se llega con excesiva rapidez y con escasa referencia a otras representaciones. En contraste, se plantean propuestas en las que se reconoce la necesidad de considerar las distintas interpretaciones de fracción (contextos que hacen significativa la noción) y sus interrelaciones, así como el hecho de que este proceso es a largo plazo (Kieren, 1976; Llinares y Sánchez, 1988; Maza y Arce, 1991), pues reconocen que desde las primeras experiencias de los niños con «mitades» y «tercios», relacionadas con la habilidad de reparto y el manejo de inclusión de clases, hasta el trabajo con razones y proporciones , que vincula no sólo la habilidad de comparar sino también el manejar dos conjuntos de datos al mismo tiempo, y del desarrollo del esquema de proporcionalidad, existe un largo camino por recorrer (Maza y Arce, p. 53).

Una limitante para la divulgación del conocimiento sobre el aprendizaje de las fracciones puede ubicarse en que este conocimiento no ha sido involucrado en las propuestas de enseñanza divulgadas en los textos, tanto del MEN, como de las editoriales que publican textos de matemática escolares para la educación básica, ni ha sido abordado en el trabajo que desde las facultades de educación de las universidades se hace en la formación de profesores de matemáticas.

4.4 INTERPRETACIONES DE LA FRACCIÓN

En un curso de décimo grado, se le pide a los estudiantes que representen en la recta numérica la expresión 3/2. Uno de ellos pasa al tablero y realiza la siguiente representación:



Como se mencionó en la sección anterior, la fracción suele trabajarse como operador, con algunas referencias a la relación parte-todo, pero pocas veces se trabaja con sus diferentes interpretaciones, a pesar de que se reconoce las dificultades que encuentran los estudiantes al abordarlas.

Cada vez es mayor el número de investigaciones que dan cuenta sobre las dificultades que tienen los estudiantes con las fracciones. En el libro "Fracciones: la relación parte- todo" (Llinares y Sánchez, 1988) se analiza detalladamente este tema, planteando la necesidad que los profesores conozcan las diversas interpretaciones del concepto y desarrollen en las clases secuencias de enseñanza tendientes a proporcionar a los niños la experiencia suficiente con cada uno de los muchos contextos que hacen significativa la noción de fracción, pues presentar solamente una única interpretación conduciría a los niños a un conocimiento atrofiado, sin una comprensión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con el concepto de fracción. Plantean, teniendo en cuenta los trabajos de varios investigadores, que estas diferentes interpretaciones (p.55), se refieren a:

a) La relación parte-todo y la medida
   a.1 Representaciones en contextos continuos y discretos
   a.2 Decimales
   a.3 Recta numérica

b) Las fracciones como cociente
   b.1 División indicada
   b.2 Como elemento de un cuerpo cociente

c) La fracción como razón
   c.1 Probabilidades
   c.2 Porcentajes

d) La fracción como operador

Las diversas interpretaciones presentadas, se apoyan en los trabajos de Novillis (1.976), quien en una tentativa para especificar estados en la comprensión de las fracciones, construyó una jerarquía de algunos conceptos de fracción, fundamentada en trabajos de investigación y, en particular, apoyado en las respuestas dadas por los niños, planteando dos niveles fundamentales. El primero, la fracción como relación parte-todo, trabajada en el modelo de área (denominado por él parte-todo, asociando la fracción con el área de una parte de la figura) y en el modelo discreto (denominado por él parte-grupo, que relaciona los elementos de un subconjunto con los del conjunto); el segundo, la fracción como razón, que expresa la comparación entre dos superficies (modelo de área) o conjuntos (modelo discreto). Además de los modelos de área y discreto, presenta el modelo de la recta numérica. Una de las conclusiones que establece es que estos dos modelos son requisitos previos para el trabajo con la recta numérica.

Niveles propuestos por Novillis (1976):

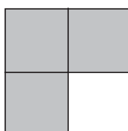
Nivel 1:

- ***Estructura a.*** Parte-grupo, partes congruentes. El estudiante asocia la fracción a/b con un conjunto de b objetos congruentes, de los cuales se toman a elementos, o asocia al mismo tiempo dos o más modelos para representar esta relación.

  Ejemplo: 

  Lo que representa que ¾ de los objetos están sombreados.

- ***Estructura b.*** Parte-todo, partes congruentes. El estudiante asocia la fracción a/b con una región geométrica que está dividida en b partes congruentes, de las cuales se toman o sombrean a partes, o asocia al mismo tiempo dos o más modelos para representar esta relación.

  Ejemplo: 

  Representa que ¾ de dibujo está sombreado.

Nivel 2:

- ***Estructura a.*** Parte- grupo, partes no congruentes: El estudiante asocia la fracción a/b con un conjunto de b objetos no congruentes, de los cuales se han som-

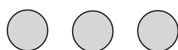
breado a, o asocia al mismo tiempo dos o más modelos para representar esta relación.

Ejemplo: 

¾ de los objetos están sombreados.

- ***Estructura b.*** Comparación parte - grupo: El estudiante asocia la fracción a/b con la comparación relativa de dos conjuntos A y B, donde n(A)= a y n(B)=b, y todos los objetos son congruentes.

  Ejemplo:



Conjunto A

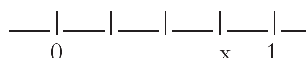


Conjunto B

El conjunto A es como ¾ del conjunto B.

- ***Estructura c.*** Recta numérica: El estudiante asocia la fracción a/b con un punto en la recta numérica, donde cada segmento de unidad está dividido en b segmentos de recta equivalentes, de los cuales a representa el punto marcado a la derecha de cero; o asocia al mismo tiempo dos o más modelos para representar esta relación.

  Ejemplo:

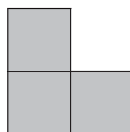


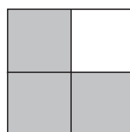
El punto sobre la recta numérica marcado con x puede ser llamado ¾.

- Estructura d. Comparación parte- todo: El estudiante asocia la fracción a/b con la comparación relativa de

dos regiones geométricas A y B, donde el número de partes congruentes en A es a y el número de partes congruentes en B es b y las partes de las figuras A y B son congruentes.

Ejemplo:

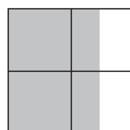

Figura A


Figura B

La figura A es como ¾ de la figura B.

- ***Estructura e.*** Parte- todo. El estudiante asocia la fracción a/b con una región geométrica, la cual está dividida en b partes, que son congruentes en área pero no en forma, a de los cuales son consideradas; o asocia al mismo tiempo dos o más modelos para representar la relación.

Ejemplo:



¾ de la figura está sombreada

Es bastante usual que en un texto hable de la relación parte-todo, sin dar una definición conceptual, o una delimitación de ella. En este escrito, dicha idea está relacionada con las habilidades que se tengan con los atributos de dicha relación, que se explicitarán en lo que sigue.

La relación parte-todo

> *Cuando se piensa en un pedazo de torta o una parte de la hoja, no necesariamente se le asocia la idea de "igualdad" en cuanto tamaño, hecho que sí es fundamental en el contexto aritmético.*

El niño tiene un contacto relativamente cercano con la relación parte-todo, en tanto expresiones que la involucran hacen parte del lenguaje infantil desde muy temprana edad. Dado que las primeras aproximaciones que el niño realiza a esta noción son cualitativas, se debería introducir la estimación en el proceso de enseñanza de las nociones iniciales sobre fracciones, con el propósito de favorecer la formación de "estructuras operativas" necesarias para que aborde la resolución de situaciones problema en las cuales esté implícita la noción de fracción.

A continuación presentamos los atributos relevantes en los cuales se apoyan las aproximaciones cuantitativas del niño al manejo de la relación parte-todo en contextos continuos-área (Llinares y Sánchez, p.80-81), los cuales pueden constituirse en un referente importante para orientar el trabajo en el aula:

1. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.

2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El «todo» se puede dividir en el número de partes pedido.

3. Las subdivisiones cubren el todo; ya que algunos niños cuando se les pide dividir un pastel entre tres muñecos, cortan tres trozos e ignoraban el resto.

4. El número de partes no coincide con el número de cortes.
5. Los trozos -partes- son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño -congruentes-

6. Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).

7. El «todo» se conserva.
8. Control simbólico de las fracciones, es decir, el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones.

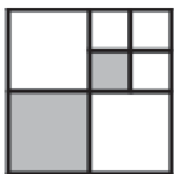
9. Las relaciones parte-todo en contextos contínuos y discretos.

10. Las fracciones mayores que la unidad.

11. Subdivisiones equivalentes.

Sin embargo el manejo adecuado de los símbolos relacionados con las fracciones requiere de un avance progresivo para evitar tropiezos a los niños y jóvenes. Por ejemplo, las respuestas dadas a la siguiente pregunta son manifestaciones de esta dificultad:

> ¿Qué fracción representa la parte sombreada en la siguiente figura?:

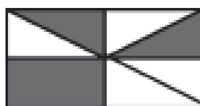


Algunas respuestas son:
* **2/5** [... porque hay dos negras y cinco blancas]
* **2/7** [... porque tomo dos de las siete que hay]

La primera respuesta refleja que la expresión 2/5 no se está reconociendo propiamente como una fracción, sino como relación entre dos cantidades (2 cuadros negros y 5 blancos). En la segunda se refleja un desconocimiento sobre la necesidad de que las partes sean «congruentes», no necesariamente de la misma forma pero sí con igual superficie. Esto podría ser "inducido" por el tratamiento metodológico dado en los libros de texto y en el aula de clase, en tanto no se tematiza sobre este particular (se asume implícitamente la congruencia), y sólo se hace énfasis en tomar un determinado número de "pedazos" de un todo, el cual pocas veces se explicita.

Avances en el uso de la sintaxis usual. En cuanto a la construcción de la escritura para la relación parte-todo, en varios trabajos orientados por el profesor Mora[2] (1997-1999) se ha encontrado evidencia sobre una secuencia que permite describir el avance de los niños para lograr la sintaxis usual en el contexto de la interpretación parte-todo. En tal secuencia se encuentran las siguientes etapas, como se ejemplifica a continuación a partir de la siguiente actividad propuesta a los niños :

> "Escriba en palabras y en número a qué parte de área corresponde la región sombreada"



1. Ausencia de conteo con los números naturales. Se manifiesta en respuestas como:

[2] Estos trabajos han sido realizados por estudiantes del Proyecto Curricular de Posgrado en Educación Matemática de la Universidad Distrital, con niños de Santa Fe de Bogotá, bajo la dirección del profesor LUIS ORIOL MORA.

2º, 4º y 5º
(haciendo referencia a la posición en que se ubican los cuadros sombreados, en relación con un orden dados por él a las partes o trozos de la figura).

2. Conteo con números naturales. Se evidencia en respuestas como:

   3 (correspondiente al número de cuadros sombreados, a la parte sombreada en relación al todo que se plantea).

3. Conteo contrastando partes sombreadas con partes no sombreadas (relaciona parte con parte). Se refleja en respuestas como:

   3 4 ; 3, 4 ; 3 y **4 ; 3 N** (negras)**- 4 B** (blancas) ; **3/4 .**

4. Reconocimiento de la escritura que relaciona la parte con el todo. Por ejemplo, con respuestas como:

   $\frac{3}{7}$ ó $\frac{7}{3}$ (a veces coexisten estas dos formas de escritura).

5. Reconocimiento en la forma de escritura usual. Representa la región sombreada como $\frac{3}{7}$.

Las anteriores respuestas corresponden a niños que no tienen en cuenta el área, sino los trozos (las partes, sin tener en cuenta la congruencia en área). Para quienes reconocen área, curiosamente la primera etapa, de las descritas anteriormente, no se presenta. En la segunda hay respuestas como 4; en la tercera etapa plantean respuestas como: 4, 4 ; 4N, 4B ó 4/4; en la cuarta responden 4/8 ; 8/4 ; 1/2 ó 2/1. En la última etapa, 4/8 ó 1/2.

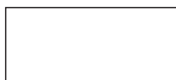
En los mencionados trabajos de grado, se ha observado que los niños de primaria se desenvuelven en las tres primeras etapas, mientras que los niños de sexto lo hacen desde la segunda hasta la cuarta etapa, y en el grado octavo algunos jóvenes tienen la escritura que relaciona parte con parte y otros, la mayoría, la que relaciona parte con todo (escriben p/t ó t/p). La existencia de estas etapas secuenciales hace que la introducción de la escritura usual de las fracciones, como relación de la parte con el todo, en la primaria sea inadecuada, pues como lo muestran los resultados de estas investigaciones, el significado que tiene para los niños el símbolo de la fracción, es relación partes contra partes. Por tanto el estudio de las fracciones en la primaria no debe centrarse en el trabajo con algoritmos numéricos (para esto se requiere de la escritura usual, precisa), sino más bien propiciar procesos encaminados a la adquisición de la sintaxis, para lo cual se propone el trabajo alrededor de la resolución de problemas que impliquen reparto y medida, haciendo uso del lenguaje corriente, mediatizado por representaciones, que desde la teoría y experiencia han cobrado una reconocida necesidad e importancia.

En los trabajos mencionados también se reportan niveles en la construcción por parte de los estudiantes (niños y jóvenes) de otro de los atributos en los cuales se apoya la noción de fracción en su aspecto parte-todo, la necesidad de considerar la unidad dividida en partes congruentes o trozos iguales bajo la relación de equivalencia en juego (en este caso, igualdad en área), es decir, dos trozos son congruentes si tienen igual área. En tales etapas, respecto del trabajo de los estudiantes, podemos observar:

Nivel 0. No hacen divisiones sobre la unidad

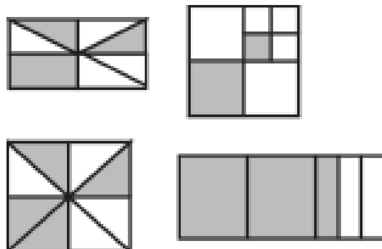
Nivel 1. Dada una unidad que no está dividida, hacen divisiones en partes congruentes para obtener una parte fraccionaria de ella.

> Por ejemplo, realizan adecuadamente la siguiente actividad: *Sombree la superficie que se indica: Un cuarto del rectángulo.*



Nivel 2. Dada una unidad dividida en partes no congruentes, reconocen medidas diferentes para las partes.

> Por ejemplo, en la siguiente actividad: *Escriba en palabras y números a qué parte del área corresponde la región sombreada.*



> Con respecto a cada una de las figuras, dan respuestas como:
> • 4/4, 4/8 ó 1/2
> • 5/11 ó 5/16
> • 4/4 , 4/8 ó 1/2
> • 7/9 ó 7/2 ó 21/3

Nivel 3. No confunden la relación de congruencia en área con la de conjuntos discretos.

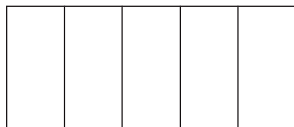
Por ejemplo, cuando se les proponemos actividades como: Escriba en palabras y números a qué parte del área corresponde la región sombreada:



Pueden reconocer que la figura no sombreada equivale, en área, a la figura sombreada de menor superficie y establecer la relación entre el área de la parte no sombreada con el área de las figuras sombreadas.

Nivel 4. Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), pueden hacer nuevas subdivisiones de la unidad.

Por ejemplo, pueden resolver adecuadamente la siguiente actividad: *Sombree la superficie que se indica: Un sexto del rectángulo*



Nótese, que en este caso, el estudiante debe realizar una nueva distribución, en seis partes congruentes, pues la figura se le da dividida en cinco partes.

Es preciso destacar que en una de las indagaciones realizadas con estudiantes de grado noveno, reportan que menos de la cuarta parte de los estudiantes ha alcanzado la última etapa en el manejo de las áreas, etapa sin la cual, según lo plantean, no hay comprensión del algoritmo para sumar fracciones heterogéneas.

4.5 PROPUESTAS DE TRABAJO EN EL AULA

Una vez presentados algunos referentes teóricos, tiene sentido describir, aunque sea de manera general, propuestas alternativas para el trabajo con fracciones.

Propuesta de Llinares y Sánchez. En su trabajo (p. 26 y 32) destacan la opinión de Freundenthal (1976), quien considera que debido al éxito que pueden tener los niños pequeños cuando trabajan intuitivamente con fracciones, los maestros hacen una introducción prematura de los algoritmos, dando lugar a dificultades de aprendizaje; por lo que recomienda que dentro de la aritmética elemental sólo debe abordarse aquella parte de las fracciones que sea accesible por métodos intuitivos, dejando otros aspectos para considerar dentro del álgebra. Partiendo del trabajo cotidiano, a partir del material concreto (entre el cual sugieren el uso de materiales didácticos[3] como las Regletas de Cuisenaire, los tangramas, folios y fichas), presentan una secuencia de actividades tendientes a adquirir habilidades en la relación parte-todo, a través de las representaciones sugeridas y categorizadas por Novillis. Su propuesta podría resumirse en el trabajo permanente de interrelación entre cuatro tipos de expresiones de fracciones:

- Expresión de las relaciones de reparto con el trabajo concreto (con folios, regleta, telas, etc.).

3 Quizás sea más adecuado llamarlo material *didactizable*, por cuanto éste no se constituye en didáctico por sí mismo; es el profesor o quien orienta la actividad el que lo hace tal.

- Expresión de las relaciones de reparto a través del lenguaje cotidiano (las dos terceras partes).
- Expresión de las relaciones de reparto a través de representaciones gráficas.
- Expresión de las relaciones de reparto a través del lenguaje matemático (son los 2/3 del área).

Es importante tener en cuenta que los autores no presentan una secuencia didáctica específica, sino que describen los elementos que debería tener dicha secuencia. No obstante, dicho conocimiento debería hacer parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Propuesta de Adalira Sáenz. Propone el desarrollo de habilidades con modelos (área y discreto), sugiriendo la siguiente secuencia:

- Trabajo desde lo gráfico. Inicialmente se sugiere realizar replicas de dibujos dados (rectángulos, círculos y triángulos) en los cuales se sombrean algunas de sus partes (las cuales son inicialmente congruentes en forma y área, y luego congruentes sólo en área). Además del trabajo de medición que esto implica.

- Divisiones y subdivisiones de figuras (en modelo de área).

- Reconocimiento, en los diferentes gráficos, de las relaciones parte con parte y parte con todo, tanto en forma verbal como escrita (inicialmente sólo en palabras).

- Trabajo de las actividades anteriores con conjuntos discretos.

- Representaciones numéricas, ligadas a representaciones en lengua materna. Se trabaja con figuras divididas en partes congruentes (en área), por ejemplo, en tres partes, de las cuales dos están sombreadas, para asociarles la expresión dos tercios (2/3), como manera de describir la relación entre la parte sombreada y el todo.

En el Proyecto Curricular de Posgrado en Educación Matemática, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, como se mencionó anteriormente, se han desarrollado varios trabajos de grado en los que se reporta no sólo algunas dificultades de los niños, en relación con el trabajo en fracciones, sino que también se proponen instrumentos de indagación y elementos para el diseño de propuestas de aula, los cuales, junto con la bibliografía que aquí se referencia, pueden ser consultadas para ampliar varios de los aspectos tratados en este escrito. En particular, Lascano et al. (1999), en su trabajo de grado titulado "Una secuencia didáctica para la enseñanza de las fracciones como relación parte todo: Reporte de una experiencia", diseñan 10 actividades que constituyen la propuesta didáctica para potenciar habilidades en atributos específicos y reportan el desarrollo de dicha secuencia con estudiantes de séptimo grado, así como los logros y dificultades encontradas. En particular, para el trabajo con las representaciones, se hace un reconocimiento de la necesidad inicial de potenciar la habilidades de dibujo (por ejemplo, para graficar un rectángulo con las medidas pedidas y las divisiones de antemano pensadas), empleando instrumentos de medida. En este trabajo se toman elementos tanto de la propuesta de Llinares y Sánchez, como de la propuesta de Sáenz presentadas anteriormente.

Finalmente, es necesario reconocer que dentro del proceso constructivo de la relación parte-todo, el trabajo con subdivisiones resulta fundamental para el desarrollo de habilidades con fracciones equivalentes (como lo sugieren Kieren y Llinares y Sánchez, entre otros) y con las representaciones asociadas a ellas (decimales, porcentajes,...), pues, por ejemplo, se constituye en elemento básico para trabajar la densidad de los números racionales. Este aspecto, es tratado con cierto detalle por Maza y Arce (1991, p. 81-102).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KIEREN, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instruccional Foundations of Rational Numbers. Citado por LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M. (1988).

LASCANO, M, MARTÍNEZ,C y PERILLA, E. (1999). Trabajo de Grado (Especialista en Educación Matemática). Santa Fe de Bogotá. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Posgrado en Educación Matemática.

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M. (1988). Fracciones: La Relación Parte -Todo. Madrid: Síntesis.

MAZA, C. (1991). El contexto numérico: Las fracciones; p. 81-103. En : MAZA, C. y ARCE, C. Ordenar y Clasificar. Madrid: Síntesis.

NOVILLIS (1976). An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies; p. 131-144. En : J. Res. Math. Ed. Vol. 7. Stud. Math. Citado por BELL, A; COSTELLO. J. and KÚCHEMANN, D. (1983). A Review of Research in Matematical Education. Windsor: NFER-Nelson, p. 119-121.

SÁENZ, A. (1998). Proyecto de aritmética: Bingo con fracciones. Material multicopiado. Santa Fe de Bogotá: Duodécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

VASCO, C. (1994). El archipiélago fraccionario; p. 23-45. En : MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Un nuevo enfoque para la Didáctica de las Matemáticas. Vol. 2. Santa Fe de Bogotá: MEN.

Editado por
Grupo Editorial Gaia
Tel: 3102668311
gaiaeditorial@gmail.com
Bogotá Colombia.

Este libro se diagramó
con las fuentes Garamond y
Eurostaile.

Se imprimieron 200 ejemplares
Septiembre de 1999